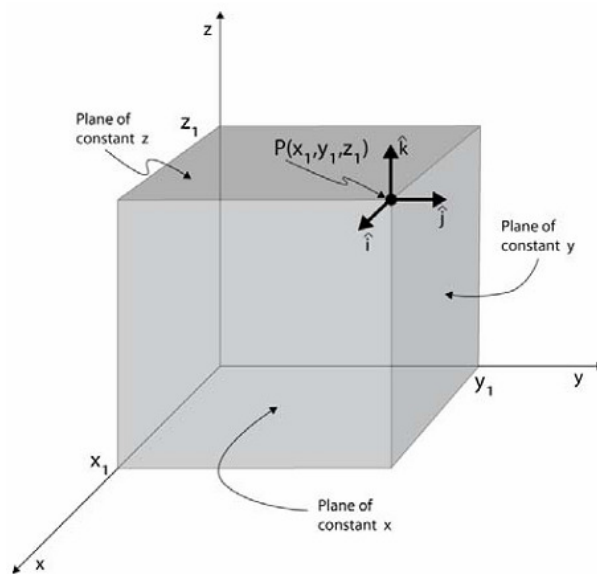


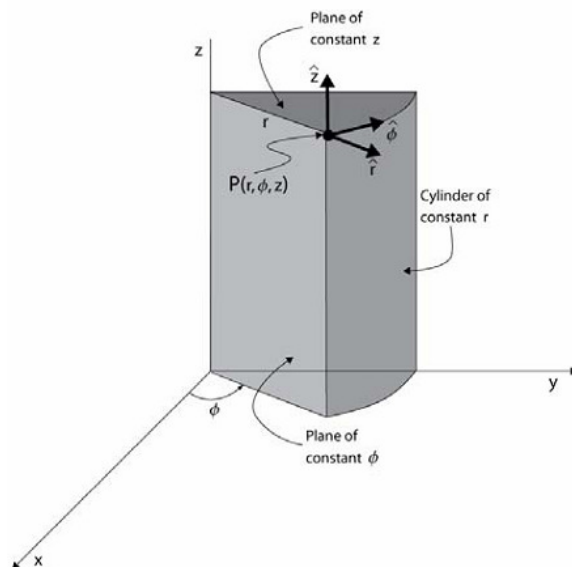
Análise Vetorial

Sistemas de coordenadas

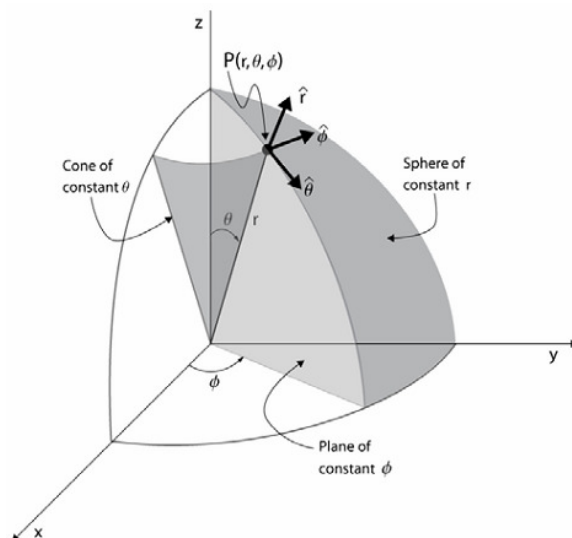
Retangular (x, y, z) , cilíndrico (r, ϕ, z) e esférico (r, θ, ϕ) são os três sistemas de coordenadas mais utilizados em eletromagnetismo. No sistema retangular, um ponto P é definido por x, y e z , em que todos esses valores são medidos a partir da origem, como mostra a figura abaixo. Um vetor pode ser definido no ponto P em termos de três componentes mutuamente perpendiculares, com vetores unitários $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ (ou $\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$).



No sistema cilíndrico, um ponto P é definido por r, ϕ, z , em que ϕ é medido do eixo-x (ou plano x - z), como na figura a seguir. Um vetor pode ser definido no ponto P em termos de três componentes mutuamente ortogonais, com vetores unitários $\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z}$ (ou $\hat{a}_r, \hat{a}_\phi, \hat{a}_z$). O vetor unitário \hat{a}_r é perpendicular ao cilindro de raio r , \hat{a}_ϕ é perpendicular ao plano de ângulo ϕ , e \hat{a}_z , ao plano x - y na distância z .



No sistema de coordenadas esféricas, um ponto P é definido por r , θ , ϕ , em que r é medido da origem, θ é medido do eixo-z, e ϕ , a partir do eixo-x (ou plano x-z), como mostra a figura abaixo. Se o eixo-z estiver na vertical, θ é denominado de ângulo zênite e ϕ , de ângulo azimute. Um vetor pode ser definido no ponto P em termos de três componentes mutuamente ortogonais com vetores unitários \hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ (ou \hat{a}_r , \hat{a}_θ , \hat{a}_ϕ). O vetor unitário \hat{a}_r é perpendicular a uma esfera de raio r , \hat{a}_θ é perpendicular ao cone de ângulo θ , e \hat{a}_ϕ , ao plano de ângulo ϕ .



Os parâmetros fundamentais dos sistemas retangular, cilíndrico e esférico são resumidos na tabela a seguir.

sistema	coordenadas	faixa	vetores unitários	comprimentos elementares	superfícies
retangular	x	$-\infty$ a $+\infty$	\hat{a}_x ou \hat{i}	dx	Plano $x = \text{constante}$
	y	$-\infty$ a $+\infty$	\hat{a}_y ou \hat{j}	dy	Plano $y = \text{constante}$
	z	$-\infty$ a $+\infty$	\hat{a}_z ou \hat{k}	dz	Plano $z = \text{constante}$
cilíndrico	r	0 a $+\infty$	\hat{a}_r ou \hat{r}	dr	Cilindro $r = \text{constante}$
	ϕ	0 a 2π	\hat{a}_ϕ ou $\hat{\phi}$	$r d\phi$	Plano $\phi = \text{constante}$
	z	$-\infty$ a $+\infty$	\hat{a}_z ou \hat{z}	dz	Plano $z = \text{constante}$
esférico	r	0 a $+\infty$	\hat{a}_r ou \hat{r}	dr	Esfera $r = \text{constante}$
	θ	0 a π	\hat{a}_θ ou $\hat{\theta}$	$r d\theta$	Cone $\theta = \text{constante}$
	ϕ	0 a 2π	\hat{a}_ϕ ou $\hat{\phi}$	$r \text{sen} \theta d\phi$	Plano $\phi = \text{constante}$

No sistema retangular, um comprimento infinitesimal é $dL = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ e um volume infinitesimal é $dv = dx dy dz$.

No sistema cilíndrico, as quantidades correspondentes são $dL = \sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2}$ e $dv = dr r d\phi dz$.

No sistema esférico, $dL = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2}$ e $dv = dr r d\theta r \text{sen} \theta d\phi$.

Transformação entre sistemas de coordenadas

Como mostra a figura a seguir, a projeção x da distância escalar r sobre o eixo- x é igual a $r \cos \alpha$, em que α é o ângulo entre r e o eixo- x . A projeção de r no eixo- y é $r \cos \beta$ e sobre o eixo- z , $r \cos \gamma$. Note que $\gamma = \theta$, então $\cos \gamma = \cos \theta$.

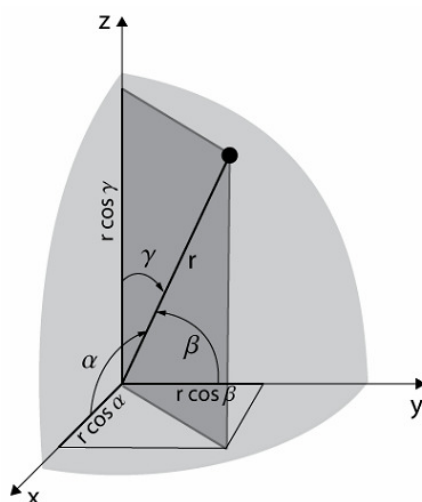
As quantidades $\cos \alpha$, $\cos \beta$ e $\cos \gamma$ são denominadas cossenos diretores e satisfazem a relação $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

A distância escalar r do sistema esférico se relaciona com as distâncias no sistema retangular por

$$\begin{aligned}x &= r \cos \alpha = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\y &= r \cos \beta = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\z &= r \cos \gamma = r \cos \theta\end{aligned}$$

Das relações anteriores, obtêm-se os cossenos diretores:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ \cos \beta &= \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ \cos \gamma &= \cos \theta\end{aligned}$$



Os valores (r, θ, ϕ) podem ser obtidos a partir das distâncias no sistema retangular pelas expressões:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & r \geq 0 \\ \theta &= \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Dessas relações, pode-se expressar um vetor \mathbf{A} , em algum ponto P , com componentes esféricas A_r, A_θ, A_ϕ em termos de suas componentes retangulares A_x, A_y, A_z , em que

$$\begin{aligned}
A_x &= A_r \sin \theta \cos \phi + A_\theta \cos \theta \cos \phi - A_\phi \sin \phi \\
A_y &= A_r \sin \theta \sin \phi + A_\theta \cos \theta \sin \phi + A_\phi \cos \phi \\
A_z &= A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta
\end{aligned}$$

Note que os cossenos diretores podem ser obtidos a partir do produto escalar entre o vetor unitário \hat{r} com os vetores unitários \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} do sistema retangular:

$$\begin{aligned}
\hat{r} \cdot \hat{x} &= \sin \theta \cos \phi = \cos \alpha \\
\hat{r} \cdot \hat{y} &= \sin \theta \sin \phi = \cos \beta \\
\hat{r} \cdot \hat{z} &= \cos \theta = \cos \gamma
\end{aligned}$$

Os produtos escalares na tabela abaixo mostram que os vetores unitários \hat{r} nos sistemas cilíndrico e esférico não são os mesmos.

cilíndrico	esférico
$\hat{r} \cdot \hat{x} = \cos \phi$	$\hat{r} \cdot \hat{x} = \sin \theta \cos \phi$
$\hat{r} \cdot \hat{y} = \sin \phi$	$\hat{r} \cdot \hat{y} = \sin \theta \sin \phi$
$\hat{r} \cdot \hat{z} = 0$	$\hat{r} \cdot \hat{z} = \cos \theta$

Da mesma forma, pode-se expressar um vetor \mathbf{A} , em algum ponto P, com componentes A_r , A_θ , A_ϕ no sistema cilíndrico em termos de suas componentes retangulares A_x , A_y , A_z , em que

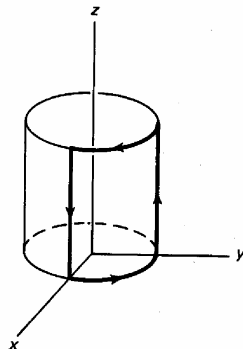
$$\begin{aligned}
A_x &= A_r \cos \phi - A_\theta \sin \phi \\
A_y &= A_r \sin \phi + A_\theta \cos \phi \\
A_z &= A_z
\end{aligned}$$

Exercícios

- 1.1. Relações trigonométricas podem ser derivadas de relações vetoriais. Considere que dois vetores unitários estejam no plano xy com ângulos α e β a partir do eixo x .
 - a) Exprese cada vetor em termos de suas componentes.
 - b) Determine uma expressão para $\cos(\alpha - \beta)$.
 - c) Determine uma expressão para $\sin(\alpha - \beta)$.
- 1.2. Considere que \vec{A} e \vec{B} sejam os lados adjacentes de um paralelogramo, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ e $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ sejam as diagonais e θ seja o ângulo entre \vec{A} e \vec{B} . Mostre que $C^2 + D^2 = 2(A^2 + B^2)$ e que $C^2 - D^2 = 4AB \cos \theta$.
- 1.3. Mostre que $\vec{B} \cdot [(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{A}] = 0$.
- 1.4. Se dois vetores são dados por $\vec{A} = \alpha \hat{a}_r + \beta \hat{a}_\phi + 3\hat{a}_z$ e $\vec{B} = \alpha \hat{a}_r + \beta \hat{a}_\phi - 6\hat{a}_z$, determine α e β tal que os dois vetores sejam paralelos. [R. $\alpha = -2$, $\beta = -2\pi$]

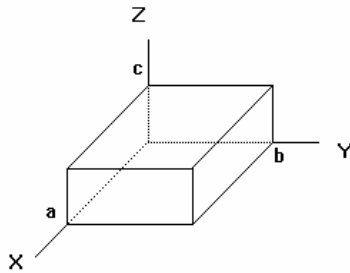
- 1.5. Um campo vetorial é definido no ponto $B(r = 5, \theta = 120^\circ, \phi = 75^\circ)$ como sendo $\vec{A} = -12\hat{a}_r - 5\hat{a}_\theta + 15\hat{a}_\phi$. Determine
- a componente vetorial de \vec{A} que é normal à superfície $r = 5$.
 - a componente vetorial de \vec{A} que é tangente à superfície $r = 5$.
 - um vetor unitário perpendicular à \vec{A} e tangente ao cone $\theta = 120^\circ$. [R. $\pm(0,78\hat{a}_r + 0,625\hat{a}_\theta)$]
- 1.6. Considere $\vec{B} = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$ e $|\vec{A}| = \sqrt{3}$. Se $A_x = 1$, determine \vec{A} de modo que \vec{A} e \vec{B} sejam perpendiculares. [R. $\vec{A} = \hat{a}_x + \hat{a}_y - \hat{a}_z$ ou $\vec{A} = \hat{a}_x - 1,3\hat{a}_y + 0,538\hat{a}_z$]
- 1.7. Sejam $\vec{A} = \cos\phi\hat{a}_r + \sin\phi\hat{a}_\phi + r\hat{a}_z$ e $\vec{B} = r\hat{a}_r + \phi\hat{a}_\phi + 2\hat{a}_z$, com ϕ expresso em radianos. Determine $\vec{A} \cdot \vec{B}$ no ponto $x = 2, y = 3$. [R. 10,029]
- 1.8. Considere uma superfície definida por $2xz^2 - 3xy - 4x - 7 = 0$. Encontre um vetor unitário normal à superfície no ponto $(1, -1, 2)$. [R. $0,63\hat{a}_x - 0,27\hat{a}_y + 0,72\hat{a}_z$]
- 1.9. Determine o volume do paralelepípedo com uma das quinas formada pelos vetores $\vec{A} = \hat{a}_x - \hat{a}_y - 6\hat{a}_z$, $\vec{B} = \hat{a}_x - 3\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$ e $\vec{C} = 2\hat{a}_x - 5\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$. [R. zero]
- 1.10. Encontre uma expressão para o vetor unitário direcionado para a origem a partir de um ponto arbitrário na linha $x = 1, z = 2$.
- 1.11. Uma dada linha é descrita por $x + 2y = 4$. Um vetor \vec{A} inicia na origem e termina em um ponto P na linha, tal que \vec{A} é ortogonal à linha. Encontre \vec{A} . [R. $0,8\hat{a}_x + 1,6\hat{a}_y$]
- 1.12. Um vetor \vec{A} é dado por $\vec{A} = r\hat{a}_r + r\hat{a}_\phi$.
- descreva o lugar dos pontos no plano xy onde o módulo de \vec{A} é constante.
 - encontre os pontos no plano xy em que \vec{A} faz um ângulo de 45° com o eixo x e tem um módulo $A = \sqrt{2}$.
- 1.13. Em coordenadas retangulares, os três vértices de um triângulo são dados pelos pontos $P_1 = (0, 2, 2)$, $P_2 = (2, -2, 2)$ e $P_3 = (1, 1, -2)$. Encontre a área do triângulo. [R. 9]
- 1.14. Escreva o vetor $\vec{A} = z \cos\phi\hat{a}_r + r^2 \sin\phi\hat{a}_\phi + 16r\hat{a}_z$ no sistema de coordenadas retangulares. [R. $\vec{A} = \left(\frac{x^2 z}{x^2 + y^2} - y^2\right)\hat{a}_x + \left(\frac{xyz}{x^2 + y^2} + xy\right)\hat{a}_y + 16\sqrt{x^2 + y^2}\hat{a}_z$]
- 1.15. Considere os vetores $\vec{A}(r, \phi, z) = 2\hat{a}_r - 3\hat{a}_\phi + \hat{a}_z$ e $\vec{B}(r, \phi, z) = 4\hat{a}_r + 6\hat{a}_\phi - 2\hat{a}_z$, definidos no ponto $P(1, \pi/3, 2)$ do sistema de coordenadas cilíndricas. Determine o produto escalar entre esses vetores: a) diretamente; b) convertendo os vetores para o sistema de coordenadas retangulares.
- 1.16. Dado o campo vetorial $\vec{F} = 10x\hat{a}_x - 5x^2 y\hat{a}_y + 3yz^2\hat{a}_z$, calcule a integral de linha entre os pontos $(0, 0, 1)$ e $(2, 4, 1)$, sobre o caminho C definido pela interseção das superfícies $y = x^2$ e $z = 1$. [R. -86,6]

- 1.17. Encontre a integral de linha do vetor $\vec{A} = y\hat{a}_x - x\hat{a}_y$ ao longo da trajetória fechada no plano xy que segue a parábola $y = x^2$ do ponto $(-1, 1)$ ao ponto $(2, 4)$ e volta pela reta $y = x + 2$.
- 1.18. Calcule a integral de linha de $\vec{A} = k r^2 z \hat{a}_\phi$ sobre um caminho fechado na superfície de um cilindro de raio igual a 2 e de $z = 0$ até $z = 3$, como na figura.

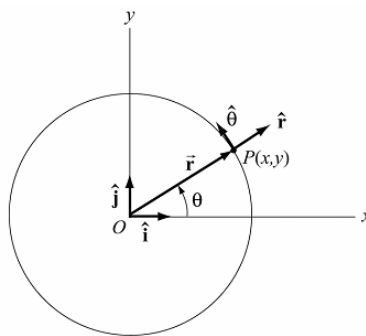


- 1.19. Use a expressão apropriada da superfície diferencial ds para determinar a área de cada uma das seguintes superfícies:
- a) $r = 3; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}; -2 \leq z \leq 2$.
 b) $2 \leq r \leq 5; \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi; z = 0$.
 c) $2 \leq r \leq 5; \phi = \frac{\pi}{4}; -2 \leq z \leq 2$.
- d) $r = 2; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}; 0 \leq \phi \leq \pi$.
 e) $0 \leq r \leq 5; \theta = \frac{\pi}{3}; 0 \leq \phi \leq 2\pi$.
- 1.20. A temperatura de uma sala é descrita como um campo escalar em graus Celsius como $T(x, y, z) = 10x + 20y$. Determine um vetor unitário na direção de máxima variação de temperatura.
- 1.21. Uma carga pontual q está localizada na origem do sistema retangular. Calcule $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$, no plano xy , ao longo do seguinte caminho: uma reta do ponto $(1, 0)$ ao ponto $(1, \frac{1}{2})$, uma reta de $(1, \frac{1}{2})$ a $(2, \frac{1}{2})$ e uma reta de $(2, \frac{1}{2})$ a $(2, 0)$. [R. $\frac{q}{8\pi\epsilon_0}$ V]
- 1.22. Calcule a integral de $\vec{F} = 2xz \hat{a}_x + (x+2) \hat{a}_y + y(z^2 - 3) \hat{a}_z$ através de cinco lados (exceto o lado da base) de um cubo de 2 m de lado localizado no primeiro octante do sistema retangular, com um dos cantos na origem desse cubo.
- 1.23. Encontre o fluxo através da superfície semi-esférica $y > 0$, raio unitário e com centro na origem, para o vetor $\vec{A} = \frac{z-r}{z^2+r^2} \hat{a}_z$.
- 1.24. Determine o fluxo do campo vetorial $\vec{F} = r \hat{a}_r - 2 \hat{a}_\theta + 3 \phi \hat{a}_\phi$ através da superfície fechada limitada por $0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi/2, -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$.
- 1.25. Dado o vetor $\vec{F} = x^2 \hat{a}_x$, calcule $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$ para S tomado como a superfície de um cubo de lados 2a e centrado na origem. Determine a integral de volume de $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ para o cubo e mostre que os resultados são equivalentes pelo teorema da divergência.

- 1.26. Dado o campo vetorial $\vec{A} = xy\hat{a}_x + yz\hat{a}_y + xz\hat{a}_z$, calcule diretamente o fluxo de \vec{A} através da superfície do paralelepípedo retangular da figura. Calcule $\int \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv$ sobre o volume do mesmo paralelepípedo e compare os resultados.



- 1.27. Calcule ambos os lados do teorema da divergência para o campo $\mathbf{A} = 2xy\hat{a}_x + x^2\hat{a}_y$ e um paralelepípedo retangular formado por planos $x = 0$ e 1 , $y = 0$ e 2 , e $z = 0$ e 3 .
- 1.28. Dado o vetor $\vec{D} = \frac{3}{8}x^3y^2\hat{a}_x \text{ C/m}^2$, encontre o fluxo total saindo da superfície de um cubo de 4 unidades de lado, centrado na origem e com seus lados paralelos aos eixos.
- 1.29. Determine o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(r, \phi, z) = r\hat{a}_r + \hat{a}_\phi + z\hat{a}_z$ através da superfície cilíndrica fechada definida por $r = 1$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq z \leq 1$. Verifique o resultado com o teorema da divergência.
- 1.30. Seja $\vec{E} = 8r\text{sen}\phi\hat{a}_r + 4r\text{cos}\phi\hat{a}_\phi \text{ N/C}$.
- Calcule o divergente de \mathbf{E} .
 - Encontre a densidade de carga volumétrica em $(2,6, 38^\circ, -6,1)$.
 - Determine a carga total na região definida por $0 < r < 1,8$, $20^\circ < \phi < 70^\circ$, $2,4 < z < 3,1$.
- 1.31. Uma particular move-se em um caminho circular de raio r no plano- xy , com velocidade angular constante $\omega = d\theta/dt$. No instante t , a partícula está em P , como mostra a figura.
- Escreva o vetor posição \vec{r} .
 - Calcule a velocidade e a aceleração da partícula em P .
 - Expresse os vetores unitários \hat{r} e $\hat{\theta}$ em termos dos vetores unitários \hat{i} e \hat{j} .



Campo Eletrostático

Considere duas cargas pontuais q_1 e q_2 separadas por uma distância r no vácuo. A força elétrica exercida em q_2 por q_1 é dada pela Lei de Coulomb:

$$\vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r$$

em que $\epsilon_0 = 8,85418 \times 10^{-12} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\text{C}}{\text{V} \times \text{m}} = \frac{\text{F}}{\text{m}}$ é a permissividade elétrica do espaço livre.

A Lei de Coulomb se aplica para qualquer par de cargas pontuais. Quando mais de duas cargas estão presentes, a força em uma delas é a soma vetorial das forças individuais exercida pelas outras cargas.

Intensidade de campo elétrico

A força eletrostática, como a força gravitacional, é um campo força que atua à distância, mesmo quando os objetos não estão em contato um com o outro. Essa ação em uma carga é realizada por um campo criado por outra carga. Uma carga q produz um campo elétrico no espaço. A intensidade desse campo pode ser medida por meio da força exercida em uma carga de teste q_0 colocada na presença desse campo. O campo elétrico é definido como

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}$$

em que \vec{F}_e é a força elétrica em uma pequena carga q_0 . Um campo elétrico \vec{E} :

- é um campo vetorial com intensidade diretamente proporcional à força e com direção dada pela direção da força em uma carga de teste positiva.
- tem unidade de newtons por coulomb [N/C], que é igual a volts por metros [V/m], uma vez que volts = newtons \times metro / coulomb.

Usando a definição de campo elétrico e a Lei de Coulomb, tem-se que para uma carga pontual q :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r$$

Metodologia para a determinação de campo elétrico usando a Lei de Coulomb

Um campo eletrostático está associado a uma distribuição de cargas que pode ser discreta ou contínua. Para distribuição discreta de cargas, aplica-se o princípio da superposição:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{R_i^2} \hat{a}_{Ri}$$

Para distribuições contínuas de cargas, deve-se calcular a integral vetorial

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R^2} \hat{a}_R$$

onde R é a distância da carga elementar dq para o ponto P de observação e \hat{a}_R é o vetor unitário correspondente. Para realizar a integração, procede-se da maneira a seguir.

1. Inicia-se com
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \hat{a}_R$$

2. Reescreve-se a carga elementar dq como

$$dq = \begin{cases} \rho_l dl & (\text{linha}) \\ \rho_s ds & (\text{área}) \\ \rho_v dv & (\text{volume}) \end{cases}$$

dependendo se a carga está distribuída sobre uma linha, uma área ou um volume.

3. Substitui-se dq na expressão para $d\vec{E}$.

4. Escolhe-se um sistema de coordenadas apropriado (retangular, cilíndrico ou esférico) e especifica-se o elemento diferencial (dl , ds ou dv) e R em termos das coordenadas (resumo na tabela).

	cartesiano (x, y, z)	cilíndrico (r, ϕ, z)	esférico (r, θ, ϕ)
dl	dx, dy, dz	$dr, r d\phi, dz$	$dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi$
ds	$dy dz, dx dz, dx dy$	$r d\phi dz, dr dz, r dr d\phi$	$r^2 \sin \theta d\theta d\phi, r \sin \theta dr d\phi, r dr d\theta$
dv	$dx dy dz$	$r dr d\phi dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

5. Reescreve-se $d\vec{E}$ em termos das variáveis de integração e aplica-se simetria para identificar as componentes do campo elétrico diferentes de zero.

6. Resolve-se a integral para obter \vec{E} .

Exercícios

2.1. Uma distribuição volumétrica de cargas, esférica e uniforme, contém 10^{-8}C . Se o raio do volume esférico é $2 \times 10^{-2}\text{m}$, encontre ρ_v .

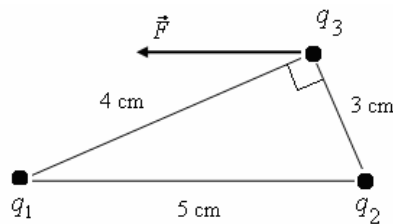
2.2. No sistema de coordenadas esféricas $\rho_v = q_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \text{C/m}^3$

a) que quantidade de carga está no interior da esfera $r = a$?

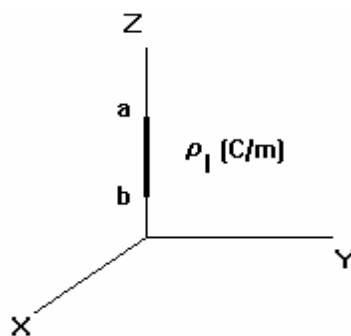
b) encontre o campo elétrico em $r = a$.

2.3. Encontre a força \vec{F}_2 , no vácuo, sobre uma carga $Q_2 = 2 \times 10^{-6}\text{C}$, devido a uma carga pontual $Q_1 = 2 \times 10^{-5}\text{C}$, quando Q_2 está no ponto $(x = 2, y = 4, z = 5)$ e Q_1 está no ponto $(x = 0, y = 1, z = 2)$.

- 2.4. Encontre a intensidade de campo elétrico em $P(x = 2, y = 4, z = 5)$ devido a uma carga pontual $Q = 2 \times 10^{-5} \text{ C}$ localizada em $(0, 1, 2)$ no vácuo.
- 2.5. Quatro cargas pontuais de $100 \mu\text{C}$ estão localizadas nos cantos de um quadrado definido no sistema retangular por $(1, 0, 0) \text{ m}$, $(0, 1, 0) \text{ m}$, $(-1, 0, 0) \text{ m}$ e $(0, -1, 0) \text{ m}$. Determine o vetor força numa outra carga localizada em $(1, 1, 0) \text{ m}$.
- 2.6. Na situação da figura a seguir, $q_1 = 2 \mu\text{C}$, mas não se conhece o seu sinal e nem o valor da carga q_2 . Sabendo que $q_3 = +4 \text{ mC}$ e que a força \vec{F} em q_3 aponta no sentido negativo do eixo- x , calcule $|\vec{F}|$.



- 2.7. O segmento reto semi-infinito $z \geq 0, x = y = 0$ está carregado com $\rho_l = 15 \text{ nC/m}$, no vácuo. Determine o campo elétrico no ponto $(1, 2, 3)$.
- 2.8. Uma linha de cargas com 2 m de comprimento tem uma densidade linear e uniforme de cargas $\rho_l = 1 \mu\text{C/m}$. Encontre o campo elétrico num ponto localizado a 1 m de um dos finais e no eixo da linha de cargas. [R. $6 \times 10^3 \text{ V/m}$]
- 2.9. Encontre a intensidade de campo elétrico devido a uma linha de cargas com distribuição linear e uniforme ao longo do eixo- z , como na figura. Determine o valor de \vec{E} quando a linha de cargas é infinita.



- 2.10. Dois fios condutores retos, de comprimento l , são colocados ao longo dos lados opostos de um quadrado. Cargas iguais a Q , mas de sinais contrários, são distribuídas uniformemente nos dois condutores. Determine a intensidade de campo no centro do quadrado. [R. $\frac{\sqrt{2}Q \text{ V}}{\pi\epsilon_0 l^2 \text{ m}}$]
- 2.11. Encontre a intensidade de campo elétrico devido a uma lâmina infinita com densidade superficial de cargas, distribuída uniformemente no plano $z = 0$.

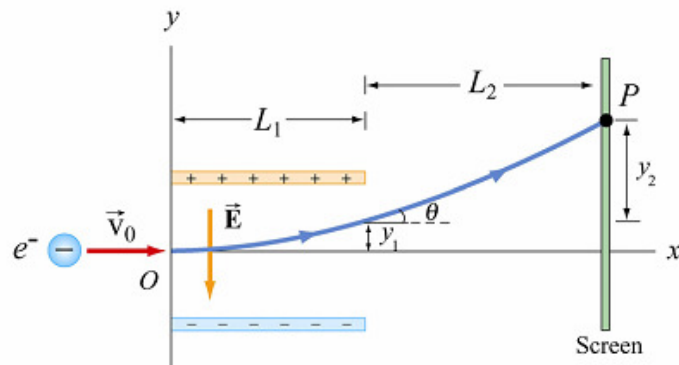
- 2.12. Encontre o fluxo através de um círculo de raio a , produzido por uma carga q localizada no eixo do círculo e numa distância z do seu centro. [R. $\frac{q}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \text{C}$]
- 2.13. Uma carga de $100\mu\text{C}$ está uniformemente distribuída sobre um disco circular tendo um raio de 2 m. O disco está no plano xy e é centrado na origem. Determine o vetor força numa carga pontual de $50\mu\text{C}$ localizada no eixo- z e em $z = 4$ m.
- 2.14. Uma fita circular de raio $1\text{m} \leq r \leq 2\text{m}$ tem uma densidade superficial de cargas dada por $\rho_s = \frac{100}{r} \mu\text{C}/\text{m}^2$. Encontre o campo elétrico em um ponto perpendicular ao plano da fita e distante 10 m do centro da fita. [R. $54,5\text{kV}/\text{m}$]
- 2.15. Uma casca semi-esférica de raio a está uniformemente carregada com uma densidade superficial de cargas. Determine o campo elétrico no centro da semi-esfera. [R. $\frac{\rho_s}{4\epsilon_0} \frac{\text{V}}{\text{m}}$]
- 2.16. Uma densidade volumétrica de cargas $\rho_v = \frac{k}{r} \text{C}/\text{m}^3$ ($r \neq 0$ e $k = \text{constante}$) existe dentro de uma esfera de raio a . Esta distribuição produz um campo elétrico para $r > a$. Determine o valor de uma carga pontual que, quando colocada na origem, produzirá o mesmo campo elétrico para $r > a$. [R. $2\pi k a^2 \text{C}$]
- 2.17. Carga é distribuída sobre a superfície de um disco de raio a localizado no plano xy e com o centro na origem. A densidade de cargas, em coordenadas cilíndricas, é $\rho_s = Ar^2 \text{C}/\text{m}^2$, onde A é constante
- qual é a unidade de A ?
 - qual é a carga total no disco?
 - encontre a força produzida numa carga pontual localizada no eixo z .
- 2.18. Dois planos infinitos, paralelos ao plano xy e localizados em $z = a$ e $z = -a$, têm densidades superficiais de cargas constantes e iguais. Encontre o campo elétrico para todos os valores de z .
- 2.19. Uma densidade superficial de cargas está distribuída uniformemente numa fita infinita em comprimento e de largura $2a$. Determine o campo elétrico num ponto perpendicular e a uma distância d do centro da fita. [R. $\frac{\rho_s}{\pi\epsilon_0} \arctg\left(\frac{a}{d}\right) \frac{\text{V}}{\text{m}}$]
- 2.20. Encontre um valor aproximado para a carga total envolvida por um volume elementar de 10^{-9}m^3 localizado na origem, se $\vec{E} = e^{-x} \text{sen } y \hat{a}_x - e^{-x} \text{cos } y \hat{a}_y + 2z \hat{a}_z \text{ N/C}$.
- 2.21. Encontre a intensidade de campo elétrico devido a uma esfera de raio r_0 , com uma distribuição volumétrica e uniforme de cargas.

2.22. Uma linha de cargas de comprimento L , com distribuição linear ρ_l constante, está ao longo do eixo z positivo com as extremidades localizadas em $z=z_0$ e $z=z_0+L$. Encontre a força total nesta linha devido a uma distribuição volumétrica e uniforme de cargas ρ_v , com centro na origem e raio $a < z_0$.

[R. $\frac{\rho_v \rho_l a^3 L}{3\epsilon_0 z_0 (z_0 + L)} \text{N}$]

2.23. Um elétron é injetado horizontalmente em um campo elétrico uniforme produzido por duas placas carregadas, como mostra a figura. A partícula tem uma velocidade inicial $\vec{v}_0 = v_0 \hat{a}_x$, perpendicular a \vec{E} .

- Enquanto estiver entre as placas, qual é a força no elétron?
- Qual é a aceleração no elétron quando ele está entre as placas?
- As placas têm comprimento L_1 na direção- x . Em que tempo t_1 o elétron deixará as placas?
- Se o elétron entra no campo elétrico em $t = 0$, qual é a velocidade do elétron no tempo t_1 ?
- Qual é o deslocamento vertical do elétron depois do tempo t_1 ?
- Qual é o ângulo θ_1 que o elétron faz com a horizontal, do tempo t_1 ?
- O elétron chega em P no tempo t_2 . Qual é o deslocamento vertical do elétron de $t = 0$ a t_2 ?



Potencial elétrico

Ao contrário do campo elétrico, o potencial elétrico é uma quantidade escalar. Para uma distribuição discreta de cargas, aplica-se o princípio da superposição para somar as contribuições individuais:

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{R_i}$$

em que $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

No caso de distribuições contínuas de carga, deve-se resolver a integral:

$$V = k_e \int \frac{dq}{R}$$

De forma análoga ao cálculo do campo elétrico, os seguintes passos devem ser utilizados para resolver a integral:

1. Inicia-se com $dV = k_e \frac{dq}{R}$.
2. Reescreve-se a carga elementar dq como

$$dq = \begin{cases} \rho_l dl & (\text{linha}) \\ \rho_s ds & (\text{área}) \\ \rho_v dv & (\text{volume}) \end{cases}$$

dependendo se a carga está distribuída sobre uma linha, uma área ou um volume.

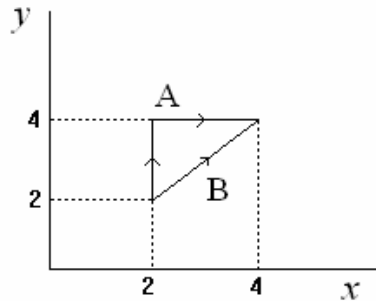
3. Substitui-se dq na expressão para dV .
4. Especifica-se um sistema de coordenadas apropriado para expressar a distância R e o elemento diferencial (dl , ds , dv) em termos dessas coordenadas.
5. Reescreve-se dV em termos da variável de integração.
6. Resolve-se a integral para obter V .

A partir do potencial elétrico V , é possível determinar o campo elétrico por $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. O resultado obtido pode ser avaliado escolhendo-se um ponto P que esteja suficientemente distante da distribuição de cargas. No limite, se a distribuição é finita, o campo deve comportar-se como se a distribuição fosse uma carga pontual, variando com o inverso da distância ao quadrado ($1/r^2$).

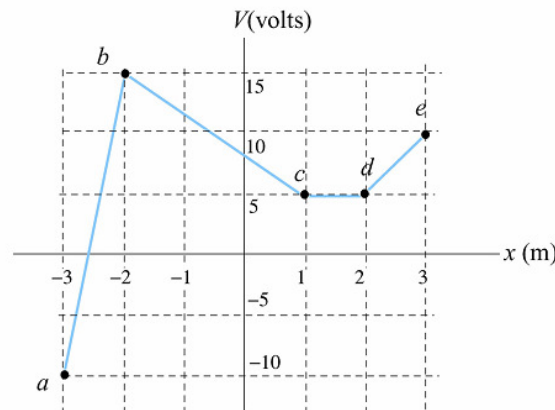
Exercícios

- 3.1. Nos vértices de um triângulo equilátero estão localizadas cargas iguais a Q . Encontre o potencial no centro do triângulo e a força em uma das cargas.
- 3.2. Um fio fino em forma de anel, com 6 cm de diâmetro, tem uma densidade de cargas uniforme igual a $1 \mu\text{C}/\text{m}$. Qual é o potencial num ponto situado no eixo e a 4 m do centro do anel?

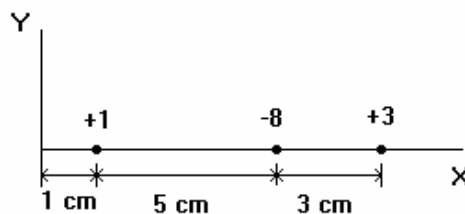
- 3.3. Considerando o campo $\vec{E} = y\hat{a}_x + x\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$, determine o trabalho realizado ao se deslocar uma carga de 2 C de (1, 0, 1) para (0,8, 0,6, 1) ao longo do arco de círculo mais curto $x^2 + y^2 = 1, z = 1$.
- 3.4. Considerando um campo $\vec{E} = -y\hat{a}_x - x\hat{a}_y$, encontre V_{ab} para dos caminhos A e B da figura.



- 3.5. Suponha que o potencial elétrico varia ao longo do eixo-x como mostrado na figura. O potencial não varia com y e z. Dos intervalos mostrados, determine o intervalo no qual E_x tem: a) o maior valor absoluto; b) o menor valor absoluto. Plote E_x em função de x. Que distribuição de cargas pode produzir essa variação no potencial? Onde elas estão localizadas?

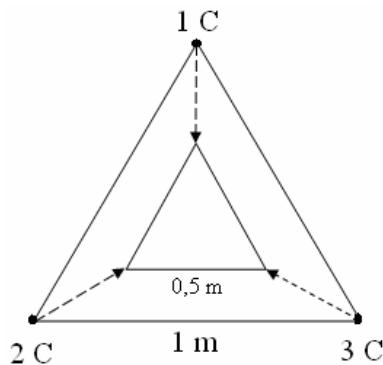


- 3.6. Utilizando $\vec{E} = -\nabla V$, mostre que $\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$ é independente do caminho entre a e b, o que prova que \vec{E} é um campo conservativo.
- 3.7. Sejam as três cargas colineares da figura, dadas em microcoulombs. Determine todos os pontos sobre o eixo x onde o potencial é nulo.

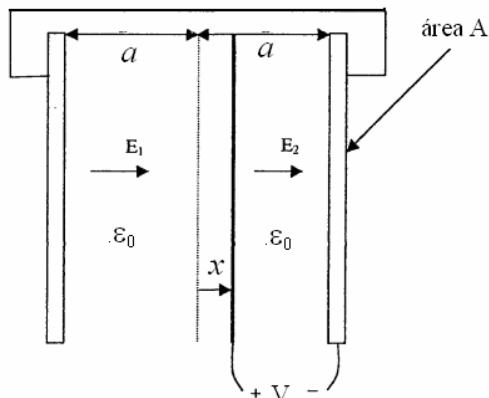


- 3.8. Dois fios finos, infinitos e paralelos, têm cargas iguais e opostas, uniformemente distribuídas. Os fios estão separados por 10 cm. Se a diferença de potencial é de 6 V entre dois pontos cujas distâncias para os dois fios são, respectivamente, 6 cm e 8 cm, e 8 cm e 6 cm, encontre o valor de ρ_l . [R. 0,579 nC/m]

- 3.9. Uma carga Q está distribuída uniformemente na metade de um anel de raio a . Determine o potencial no centro do anel. [R. $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} V$]
- 3.10. A superfície quadrada $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, está carregada com uma densidade de cargas $\rho_s = 100\pi\epsilon_0 |x| \text{ C/m}^2$. Determine: a) o potencial no ponto $(0, 0, z)$. b) o campo elétrico ao longo do eixo-z.
- 3.11. Uma distribuição uniforme de cargas, ocupando um volume esférico de raio a , está centrada na origem do sistema de coordenadas. Se a carga total é Q encontre a energia eletrostática do sistema.
- 3.12. Determine a energia armazenada, no vácuo, para três cargas iguais a Q situadas nos vértices de um triângulo equilátero de lado d . [R. $\frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \text{ J}$]
- 3.13. Considere um quadrado de lado a . Iniciando-se num dos vértices e continuando-se numa direção contrária aos ponteiros do relógio, coloca-se uma carga pontual q no primeiro vértice, $2q$ no próximo, a seguir $3q$ e, finalmente, $-4q$. Encontre a energia elétrica para esta distribuição de cargas. [R. $-\frac{0,918q^2}{\epsilon_0 a} \text{ J}$]
- 3.14. Três cargas pontuais de 1 C, 2 C e 3 C estão situadas nos cantos de um triângulo equilátero de lado igual a 1 m. Encontre o trabalho necessário para mover essas cargas para os cantos de um triângulo equilátero de 0,5 m de lado, como na figura.

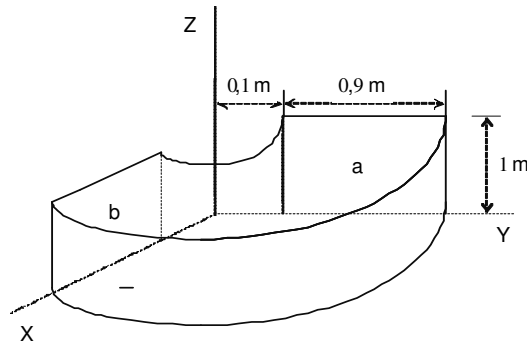


- 3.15. Duas placas condutoras paralelas, de área A e separadas por uma distância $2a$, são curto-circuitadas, como mostrado na figura. Determine a carga total na terceira placa, com potencial V , inserida entre essas duas placas.

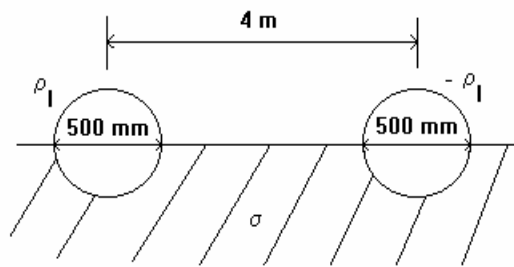


Resistência e capacitância

- 4.1. Encontre a resistência entre $\phi = 0$ e $\phi = \pi/2$ para o condutor mostrado na figura, quando $\sigma = 4 \times 10^7 \text{ S/m}$ e $\vec{E} = -\frac{1}{r} \hat{a}_\phi \frac{V}{\text{m}}$.



- 4.2. Duas tubulações de ferro, longas e paralelas, têm um espaçamento de 4 m entre os centros. Os tubos estão enterrados no solo até a metade, como ilustra a figura. A condutividade do solo é $100 \mu\text{S/m}$. Ache a resistência entre os dois tubos por metro de comprimento.



- 4.3. Uma esfera condutora, de raio a , está enterrada até a metade e fica em contato com uma placa de terra de raio b e condutividade σ_2 . O restante da terra tem condutividade σ_1 . Determine a resistência entre a esfera e a terra. [R. $\frac{1}{2\pi\sigma_1 b} + \frac{1}{2\pi\sigma_2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \Omega$]

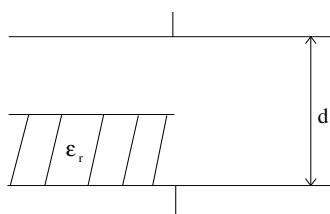
- 4.4. Um pedaço de material condutor para o qual $\sigma = 5 \text{ MS/m}$ tem a forma de uma cunha truncada com as dimensões $4 < r < 10 \text{ cm}$, $0 < \phi < 0,2\pi$ e $0 < z < 6 \text{ cm}$. Dentro do condutor $\vec{E} = \frac{2 \times 10^{-3}}{r} \hat{a}_r \text{ V/m}$. Qual é a sua resistência? [R. $4,86 \times 10^{-6} \Omega$]

- 4.5. Determine a capacitância entre duas cascas esféricas condutoras, concêntricas, de raios a e b ($b > a$), se o espaço que envolve a esfera interna contém um dielétrico de permissividade ϵ até um raio igual a $(a + b)/2$. O restante do espaço tem permissividade ϵ_0 .
- 4.6. Uma esfera condutora isolada, com 5 cm de diâmetro, é coberta uniformemente com um dielétrico com $\epsilon_r = 10$ e espessura b . Sabe-se que a adição de uma outra camada de 10 cm de espessura dobra a capacitância. Encontre b .

4.7. Seja um capacitor de forma arbitrária e dielétrico homogêneo de permissividade ϵ . Sabe-se que quando o dielétrico é substituído por um condutor homogêneo de condutividade σ_c , a resistência do sistema é R . Determine a capacitância. [R. $\frac{\epsilon}{\sigma_c R}$ F]

4.8. A permissividade do material dielétrico de um capacitor de placas planas e paralelas varia linearmente de ϵ_1 numa placa para ϵ_2 na outra. Determine a capacitância, se A é a área e d é a separação entre as placas. [R. $\frac{A(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)}$ F]

4.9. Encontre a capacitância equivalente do capacitor de placas paralelas da figura, que tem um quarto de seu volume preenchido por um dielétrico com constante dielétrica ϵ_r . [R. $\frac{\epsilon_0 A}{d} \left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \right)$ F]



4.10. Seja um capacitor de placas paralelas com área $A = 100 \text{ cm}^2$ e distância entre placas $a + b$. Coloque entre as placas dois dielétricos, um de espessura a e $\epsilon_a = 6\epsilon_0$ e outro de espessura b e $\epsilon_b = 3\epsilon_0$. Para uma diferença de potencial de 1.000 V aplicada entre as placas, calcule como esta tensão é dividida através dos dielétricos. Dados $b = 2a = 2 \text{ mm}$.

4.11. Um capacitor consistindo de duas placas paralelas é carregado por uma bateria de 12 kV e a seguir é isolado. Quando uma lâmina de porcelana, de espessura igual a metade da distância entre as placas, é inserida entre elas, a diferença de potencial cai para 7 kV . Calcule a constante dielétrica da porcelana. [R. 6]

4.12. Um capacitor de placas planas e paralelas com área A , separação d e permissividade ϵ é carregado por uma bateria de tensão igual a V , que é desligada do capacitor após o carregamento.

a) Qual é a energia do capacitor? [R. $\frac{\epsilon AV^2}{2d}$ J]

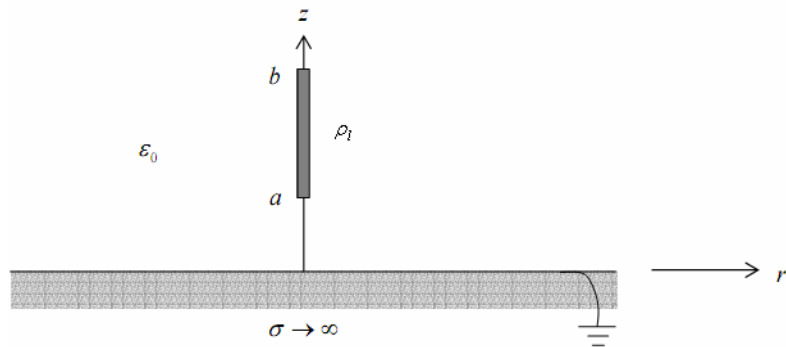
b) uma lâmina metálica não carregada, de espessura t , é colocada entre e paralela às placas do capacitor. Encontre a nova capacitância. Qual o trabalho feito por forças elétricas durante a inserção da lâmina metálica? [R. $\frac{\epsilon A}{d-t}$ F, $\frac{V^2 \epsilon A t}{2d^2}$ J]

c) qual é a diferença de potencial no capacitor depois da lâmina ser inserida? [R. $\frac{d-t}{d} V$]

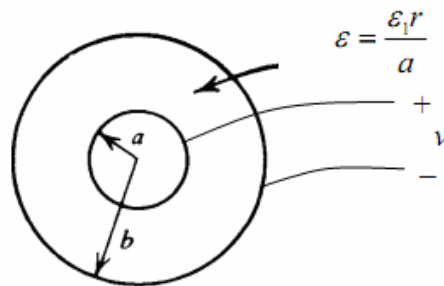
4.13. O diâmetro do condutor interno de um cabo coaxial é 10 mm e do externo é 20 mm . O isolante tem uma constante dielétrica relativa igual a 5 e pode suportar um campo elétrico máximo de 200 kV/cm . Qual é a máxima energia eletrostática por km que pode ser armazenada no cabo?

4.14. Um capacitor de placas planas e paralelas é construído da seguinte maneira: alumínio é depositado nas duas faces de um papel com espessura $0,03 \text{ mm}$ e área igual a 100 cm^2 . A constante dielétrica do papel é igual a 3 e a intensidade de campo elétrico máximo que ele pode suportar é $2 \times 10^5 \text{ V/cm}$. Determine a energia armazenada nesse capacitor quando a tensão de carregamento é igual à metade da tensão máxima que pode ser aplicada.

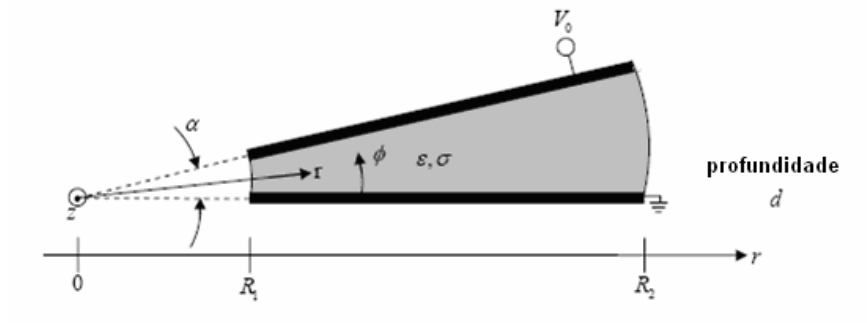
- 4.15. Uma linha de cargas é colocada no espaço livre ao longo do eixo- z , na presença de um plano condutor infinito, como mostra a figura. Determine o potencial no eixo- z , para $z > b$.



- 4.16. Determine a capacitância do capacitor esférico concêntrico mostrado na figura. Os eletrodos têm raios a e b e o dielétrico tem permissividade $\epsilon(r) = \frac{\epsilon_1 r}{a}$.



- 4.17. Considere os dois eletrodos planos com ângulo interno α e profundidade d na direção z (saindo do papel), como na figura. O meio entre os eletrodos tem permissividade elétrica ϵ e condutividade σ . Na região dielétrica com perdas, não existe densidade volumétrica de cargas livres. Os potenciais elétricos dos eletrodos são $V(\phi = 0) = 0$ e $V(\phi = \alpha) = V_0$. Calcule a capacitância desse dispositivo.



Campo magnetostático

- 5.1. Determine a força no fio da figura 5.1, quando colocado num campo B uniforme e direcionado para z , sentido negativo.
- 5.2. Um condutor retilíneo muito longo, com uma corrente I , está contido no plano de um condutor triangular que suporta uma corrente I' , de modo que um dos lados do triângulo está paralelo ao condutor retilíneo, conforme mostra a figura 5.2. Determine a força mútua entre os dois condutores.

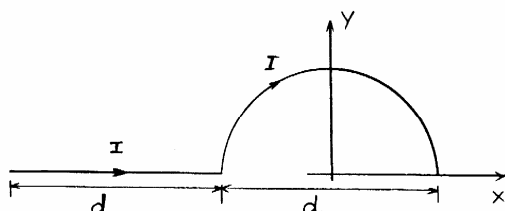


Figura 5.1

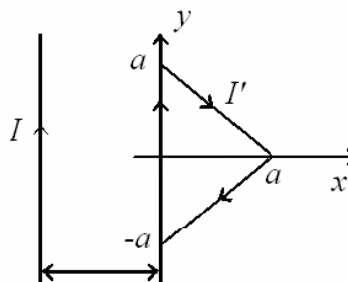
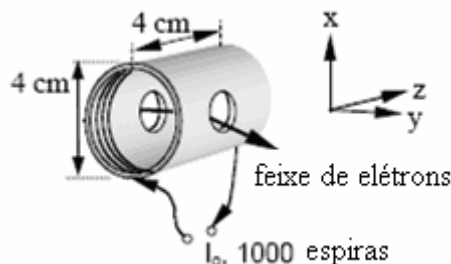


Figura 5.2

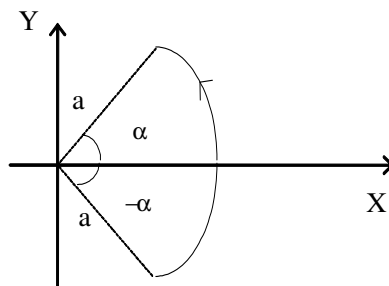
- 5.3. Uma partícula com carga negativa de 10^{-17} C e massa 10^{-26} kg está em repouso no espaço livre. Se um campo elétrico de 1 kV/m é aplicado por 1 μ s, encontre: a) a velocidade da partícula; b) o raio de curvatura do caminho da partícula, se ela entra num campo magnético de 2 mT, com velocidade normal à \mathbf{B} .
- 5.4. Considere uma corrente fluindo no percurso condutor formado, no sistema de coordenadas circulares, por dois semicírculos, um interno de raio a e outro externo de raio b , ligados por dois segmentos radiais em $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$. Encontre o campo magnético na origem do sistema de coordenadas.
- 5.5. Um tubo de raios catódicos usa uma bobina de deflexão magnética para mudar a trajetória de um feixe de elétrons, como ilustrado na figura. A bobina tem diâmetro igual a 4 cm, corrente $I_0 = 2$ A e 1.000 espiras distribuídas uniformemente sobre 4 cm de comprimento. O feixe de elétrons, acelerado por uma diferença de potencial de 20 kV, atravessa as aberturas na parede da bobina. Determine a força em cada elétron quando ele passa através da bobina. Dados: carga do elétron igual a $-1,6 \times 10^{-19}$ C e massa do elétron $9,1 \times 10^{-31}$ kg.



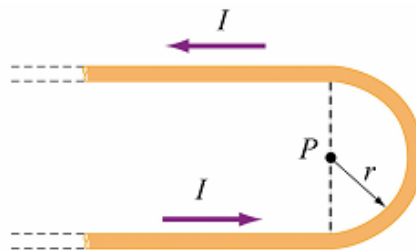
- 5.6. Uma partícula A com carga q e massa m_A e uma partícula B com carga $2q$ e massa m_B são aceleradas do repouso por uma diferença de potencia ΔV , e a seguir defletidas por um campo magnético uniforme em um percurso circular. Os raios das partículas A e B são, respectivamente R e $2R$. A direção do campo magnético é perpendicular à velocidade das partículas. Determine a relação entre as massas m_A/m_B .
- 5.7. Calcule a intensidade de campo magnético no centro de um fio quadrado de lado a , com uma corrente I fluindo através dele. [R. $\frac{2\sqrt{2}I}{\pi a} \frac{\text{A}}{\text{m}}$]

- 5.8. A corrente filamentar mostrada na figura percorre um arco de círculo no plano xy , com o centro de curvatura na origem. Encontre a intensidade de campo magnético em qualquer ponto do eixo z . [R.

$$\frac{Ia}{2\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} [z \operatorname{sen} \alpha \hat{a}_x + a \alpha \hat{a}_z] \frac{A}{m}$$



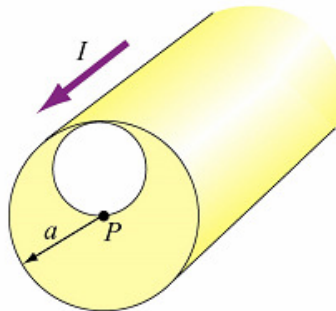
- 5.9. Um fio muito longo tem a forma de um grampo, com os trechos paralelos separados por uma distância de 7 cm, como ilustra a figura. Qual deve ser a corrente para que um campo de $10^3/4\pi$ A/m seja produzido no centro do trecho curvo?



- 5.10. Um fio muito longo tem a forma de um grampo, com os trechos paralelos separados por uma distância de 7 cm. Se uma corrente igual a 10 A circula nesse fio, qual é o valor da densidade de fluxo magnético no centro do trecho curvo?
- 5.11. Um disco de raio b e espessura t conduz uma corrente circular em torno do seu centro. Um sistema de coordenadas cilíndricas tem origem no centro do disco e o eixo z coincide com o eixo de simetria do disco. A densidade de corrente no disco é $\vec{J} = kr \hat{a}_\phi$ A/m², em que k é uma constante real positiva. Encontre a intensidade de campo magnético no centro do disco, supondo que t é muito menor que b .
- 5.12. Determine \mathbf{H} em $z = 3,11$ m, para uma distribuição de corrente dada por: a) $\mathbf{J}_s = 100 \hat{a}_y$ A/m em $z = 0$; b) $\mathbf{J} = 10 \hat{a}_y$ A/m² para $-5 < z < 5$.
- 5.13. Dentro de um cilindro condutor de raio a , a densidade de corrente decresce exponencialmente com o raio tal que $\vec{J} = A \exp(-kr) \hat{a}_z$, em que A e k são constantes. Determine a intensidade de campo magnético em todo o espaço.
- 5.14. Uma bobina cilíndrica uniforme de 2.000 espiras tem 600 mm de comprimento e 60 mm de diâmetro. Se fluir uma corrente de 15 mA, ache a densidade de fluxo: a) no centro da bobina; b) sobre o eixo, numa das extremidades; c) sobre o eixo, a meio caminho entre o centro e a extremidade da bobina.
- 5.15. Qual é a distribuição de corrente necessária para produzir o campo magnético $\vec{H} = y^3 \hat{a}_x$?
- 5.16. Considere um feixe cilíndrico e longo de partículas carregadas. O feixe tem uma seção transversal circular de raio a , uma densidade uniforme de cargas ρ_v e as partículas têm a mesma velocidade

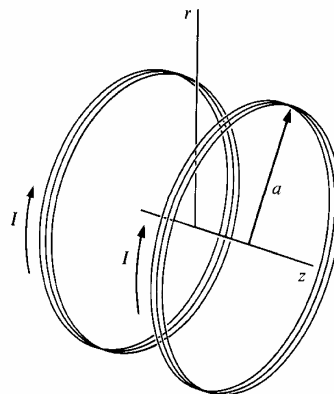
constante \vec{v} . Encontre a intensidade de campo magnético dentro e fora do feixe. Expresse o resultado em termos dos parâmetros fornecidos. [R. $\frac{\rho_v v r}{2}$, $0 < r < a$; $\frac{\rho_v v a^2}{2r}$, $r > a$]

- 5.17. Uma corrente I circula em um cilindro de cobre de raio a que tem um buraco ao longo do seu comprimento, como mostra a figura. Encontre o campo magnético (em módulo e direção) no ponto P da figura.



- 5.18. Duas bobinas circulares idênticas, com N espiras e raio a , têm os eixos coincidentes e estão separadas uma da outra por uma distância igual ao raio a , formando um par de Helmholtz. Ambas conduzem uma corrente I , no mesmo sentido. Considere que a área da seção transversal das bobinas seja desprezível, de modo que cada uma delas possa ser representada por uma espira fina com uma única volta e corrente NI .

- a) Determine a densidade de campo magnético no eixo das bobinas, num ponto situado a uma distância $a/2$ entre elas.
- b) Considere que o campo obtido no item anterior exista em toda uma área circular de raio a entre as duas espiras e que um elétron, acelerado por um potencial V , entre nessa região com uma direção normal ao campo magnético de modo que adquira um movimento circular de raio R . Determine uma expressão para se obter a relação entre a carga e a massa do elétron.

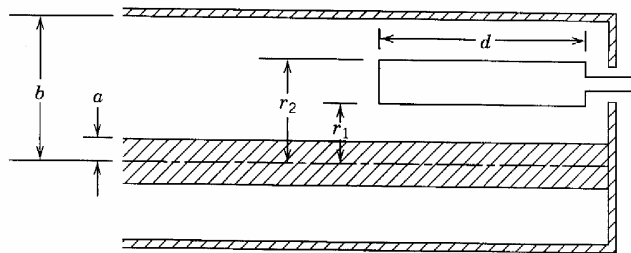


- 5.19. Encontre a indutância mútua entre um solenóide de 1.000 espiras, 50 cm de comprimento e seção quadrada de 3 cm de lado, e o solenóide que é coaxial com ele, mas que tem 1.500 espiras e seção quadrada de 4 cm de lado. Considere $\mu = \mu_0$. [R. 3,39 mH]

- 5.20. Um toróide com núcleo de material magnético tem uma seção transversal de 3 cm^2 e comprimento médio de 20 cm.

- a) se para $NI = 300 \text{ Ae}$ um fluxo magnético de $5 \times 10^{-4} \text{ Wb}$ é estabelecido no núcleo, encontre a permeabilidade do material. [R. $1,11 \times 10^{-3} \text{ H/m}$]
- b) se um *gap* de ar de comprimento 0,1 mm é introduzido, encontre o novo valor de NI para manter o mesmo fluxo magnético. [R. 436 Ae]

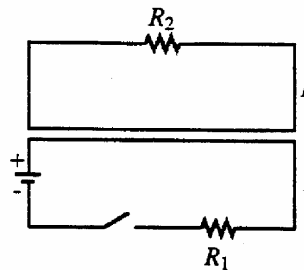
- 5.21. Ache a indutância mútua entre uma corrente filamentar infinita e uma bobina com 500 espiras e seção retangular de lados 4 cm e 5 cm, quando a corrente filamentar está paralela ao maior lado e separada po uma distância de 2 cm da bobina. [R. $5,5 \mu\text{H}$]
- 5.22. Um solenóide cilíndrico de raio 1,2 cm e comprimento 30 cm tem 3.000 espiras e corrente de 40 mA, considerando $\mu = \mu_0$, calcule:
- energia armazenada no campo magnético. [R. $13,6 \mu\text{J}$]
 - indutância a partir de W_m . [R. 17 mH]
- 5.23. Uma linha coaxial tem um loop retangular para acoplamento como mostra a figura. Encontre a indutância mútua entre o loop e a linha coaxial, assumindo que na região do loop o campo é independente de z .



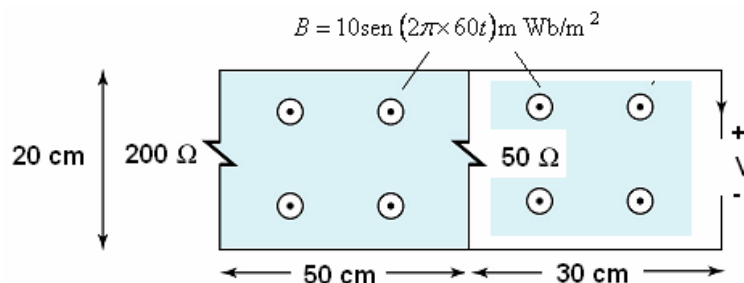
- 5.24. Um toróide tem uma seção reta quadrada de 25 cm^2 de área e um diâmetro médio de 25 cm. O material do núcleo tem uma permeabilidade relativa igual a 1.000.
- Calcule o número de voltas no enrolamento para se obter uma indutância de 1 H. [R. 500]
 - Se o número de voltas for dobrado, qual é o efeito na indutância ?
- 5.25. Um solenóide com 1.200 espiras, 60 cm de comprimento e 1 cm de diâmetro é enrolado num núcleo cilíndrico no qual $\mu_r = 12$. Esta bobina é centrada coaxialmente no interior de um segundo solenóide que tem 800 espiras, 60 cm de comprimento e 3 cm de diâmetro. Calcule a indutância mútua entre eles. [R. 1,895 mH]

Lei de Faraday da Indução

- 6.1. A chave na figura é fechada em $t = 0$ e aberta em t_1 . Qual é o sentido da corrente no loop superior em cada um desses tempos?

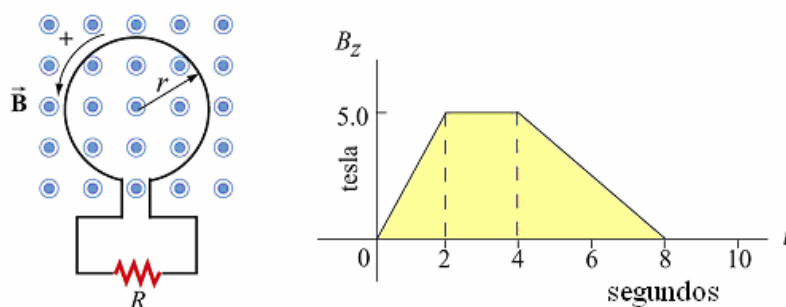


- 6.2. Determine a voltagem V no circuito da figura. [R. $301,6 \cos(2\pi \times 60t)$ mV]

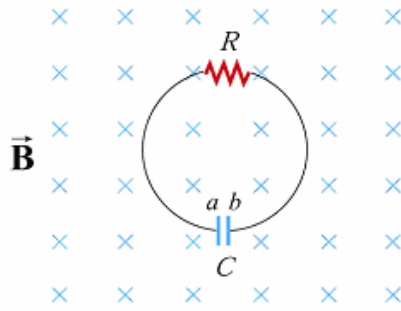


- 6.3. Uma bobina quadrada com 100 espiras tem 0,25 m de lado. A bobina está centrada na origem com cada lado paralelo aos eixos x e y . Encontre a *fem* nas extremidades em aberto da bobina para:
 a) $\vec{B} = 10e^{-2t} \hat{a}_z$ T. b) $\vec{B} = 10 \cos x \sin 2y \cos 10^3 t \hat{a}_z$ T. [R. a) $125e^{-2t}$; b) zero]

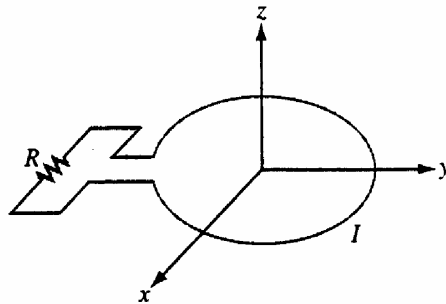
- 6.4. Um campo magnético uniforme \vec{B} está perpendicular para um fio circular, cujo valor da resistência pode ser desprezado, como mostra a figura. O campo varia no tempo de acordo com o gráfico da figura (o sentido positivo de z está saindo do papel). O raio do fio é $r = 50$ cm e está conectado em série com um resistor de resistência $R = 20 \Omega$. Determine a potência dissipada no resistor.



- 6.5. Considere um fio condutor circular de raio r no plano xy , como mostrado na figura. O fio contém um resistor de resistência R e um capacitor de capacitância C , e é colocado em um campo magnético uniforme que aponta para dentro do papel e diminui com a taxa $dB/dt = -\alpha$, com $\alpha > 0$. Encontre a quantidade máxima de carga no capacitor.



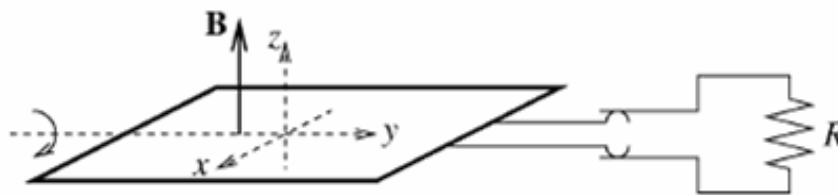
- 6.6. O loop da figura está no plano x-y e o campo é $\vec{B} = B_0 \sin \omega t \hat{a}_z$ com B_0 positivo. Qual é a direção da corrente em $t = 0$, $\omega t = \pi/4$ e $\omega t = \pi/2$?



- 6.7. Um gerador elétrico (como mostrado na figura) está girando em torno do eixo-y com uma frequência f Hz. Existe um campo magnético uniforme $B = 0,5$ Tesla na direção $+z$. O rotor consiste de uma bobina com N espiras, cada uma com área S m². O gerador, por meio de molas de contato, está fornecendo potência para uma lâmpada cuja resistência é R Ω.

a) Determine o valor máximo da corrente alternada induzida. [R. $\frac{\pi f N S}{R}$]

b) Determine o valor médio no tempo da potência mecânica, em watts, que deve ser fornecida para manter a rotação da bobina. [R. $\frac{(\pi f N S)^2}{2R}$]



- 6.8. Descarga atmosférica pode danificar equipamentos elétricos, mesmo se esses equipamentos não recebem diretamente a descarga. Um raio pode ser considerado como uma fonte de corrente, mesmo a grandes distâncias. Considere o modelo do efeito de uma descarga atmosférica típica na fiação elétrica de uma casa. Assuma que a corrente associada ao raio possa ser modelada como na figura I. Assuma também que a instalação elétrica de um depósito tenha os fios que formam um percurso como na figura II. Determine a voltagem induzida em um computador que esteja conectado a essa fiação elétrica. Considere que o raio ocorreu a uma distância de 1 km do depósito.

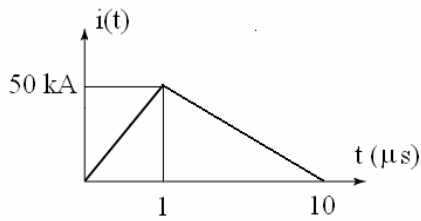


Figura I

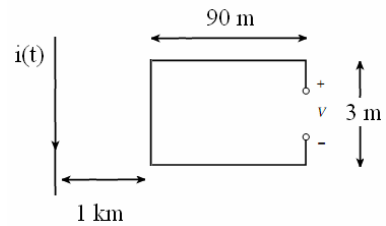
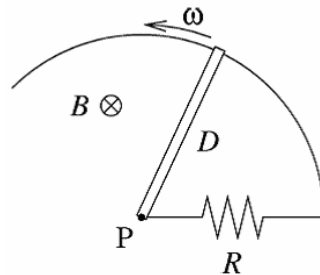


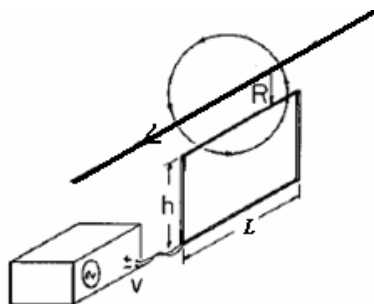
Figura II

- 6.9. Uma barra condutora de comprimento D rotaciona com frequência angular ω em torno de um ponto P, como ilustra a figura. A outra extremidade da barra está em contato com um fio condutor que tem forma de um anel circular (apenas parte do condutor circular é mostrada na figura). Entre o ponto P e o fio condutor existe um resistor de resistência R , tal que é formado um percurso condutor fechado. A resistência da barra e do fio condutor são muito pequenas em comparação à R . Em toda a região, existe um campo magnético uniforme \mathbf{B} com direção perpendicular ao plano do papel. Determine a corrente induzida no percurso condutor. Expresse o resultado em termos de D , R , B e ω . [R. $\frac{\omega B D^2}{2R}$]



- 6.10. Uma bobina retangular (N espiras, altura h e comprimento L) é usada para medir a intensidade de campo magnético H devido à corrente $i = I_0 \sin(\omega t)$ existente em um fio longo distante R da bobina, como mostrado na figura. Determine:

- a) o fluxo magnético total acoplado pela bobina com N espiras. [R. $N \frac{\mu_0 I}{2\pi} L \ln\left(\frac{R+h}{R}\right) \text{ Wb}$]
- b) $v(t)$ através dos terminais da bobina, para $N = 20$, $h = 8 \text{ cm}$, $L = 20 \text{ cm}$, $R = 2,25 \text{ cm}$, $I_0 = 6 \text{ A}$ e frequência igual a 60 Hz . [R. $-2,7 \times 10^{-3} \cos(\omega t)$]



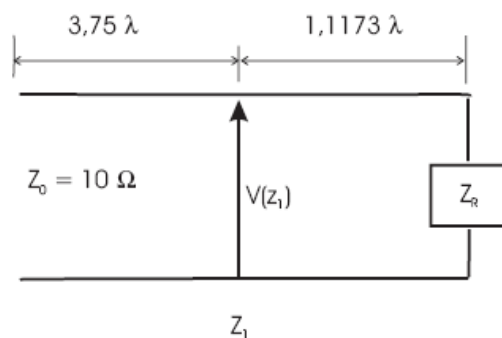
Campo variando no tempo

- 7.1. Determine o fasor associado à voltagem $v(t) = 100 \cos(120\pi t + 60^\circ)$ V.
- 7.2. O fasor corrente ao longo de um condutor é $I(z) = j 21,2 \cos(\beta z)$ A. Determine a corrente em função de z e t para a frequência de 100 MHz. [R. $-21,2 \cos(\beta z) \text{sen}(2\pi \times 10^8 t)$]
- 7.3. Determine a notação fasorial para $v(t) = \cos(120\pi t + \pi/3) + \text{sen}(120\pi t)$ V.
- 7.4. Determine a notação fasorial para $v(t) = \cos(120\pi t) + \cos(240\pi t)$ V.
- 7.5. O sinal $v(t) = \cos(\omega t + \pi/3)\text{sen}(\omega t)$ V pode ser representado em notação fasorial?
- 7.6. Uma fonte de voltagem dada por $v(t) = 10 \cos(2\pi \times 10^3 t - 30^\circ)$ V é conectada a uma carga RC série, em que $R = 1 \text{ M}\Omega$ e $C = 100 \text{ pF}$. Obtenha uma expressão para a voltagem no capacitor em função do tempo. [R. $v(t) = 8,5 \cos(2\pi \times 10^3 t - 62,1)$]
- 7.7. Uma onda sonora na frequência de 4 kHz se propaga no ar na direção- x , sentido positivo. Em $x = 0$ e $t = 25 \mu\text{s}$, a pressão diferencial é $p(x, t) = 5 \text{ N/m}^2$. Encontre a expressão completa para $p(x, t)$, se a fase de referência de $p(x, t)$ é 42° , A velocidade do som no ar é 330 m/s. [R. $p(x, t) = 24 \cos(8\pi \times 10^2 t - 24,24\pi x + 42)$ N/m²]
- 7.8. Uma onda harmônica que se desloca ao longo de uma corda foi gerada por um oscilador que completa 120 vibrações por minuto. Se um ponto de máximo caminha 250 cm em 10 s, qual é o comprimento de onda? [R. 12,5 cm]
- 7.9. Duas ondas, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, têm amplitudes idênticas e oscilam na mesma frequência, mas $y_2(t)$ está adiantada de $y_1(t)$ por um ângulo de fase igual a 60° . Para $y_1(t) = 4 \cos(2\pi \times 10^3 t)$, escreva a expressão correspondente para $y_2(t)$ e plote as duas funções no intervalo de tempo de 0 a 2 ms.
- 7.10. Um oscilador que gera uma onda senoidal em uma corda completa 20 vibrações em 30 s. No tempo igual a 5 s, observa-se que o pico da onda percorre uma distância de 2,8 m ao longo da corda. Determine o comprimento de onda. [R. 0,84 m]
- 7.11. Escreva a equação (no plano x - z) para uma onda que satisfaça o seguinte: a onda se propaga com velocidade de 100 m/s na direção $+z$, tem amplitude (na direção x) igual a 0,005 e frequência 400 Hz. [R. $x(z, t) = 0,005 \text{sen}(800\pi t - 8\pi z)$]
- 7.12. Para controle de velocidade, a polícia rodoviária utiliza um radar com potência de transmissão de 100 mW. A antena do radar é um refletor parabólico com diâmetro de 20 cm e área efetiva igual a 60% da área física. Considere que, para detectar a presença desse radar, um motorista usa um receptor de microondas com sensibilidade de sinal mínima de 10^{-6} mW. A antena acoplada ao receptor tem ganho igual a 100. Nessas condições, determine a distância máxima que o radar de controle da polícia pode ser detectado.
- 7.13. Um campo elétrico tem a forma $\vec{E} = 10 \text{Re}[e^{j(4\pi \times 10^6 t - 4\pi \times 10^{-2} z)}] \hat{a}_x$ V/m. Se a permissividade magnética é $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, determine: a) a frequência; b) o comprimento de onda; c) a velocidade de fase; d) o índice de refração. [R. a) 2 MHz; b) 50 m; c) 10^8 m/s; d) $n = 3$.]
- 7.14. Considere uma onda plana uniforme tendo $\vec{H}(x, t) = \text{sen}(10^9 t + 10x) \hat{a}_y$ [A m⁻¹]. Determine: a) a frequência, em Hz. b) a direção e o sentido de propagação. c) a velocidade. d) o comprimento de

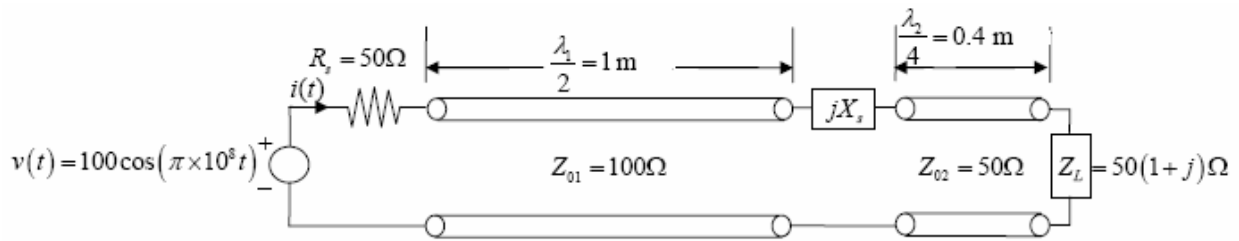
- onda. e) o valor de μ (considere $\epsilon = \epsilon_0$). f) $\vec{E}(x,t)$. [R. a) $\frac{10^9}{2\pi}$; b) direção x , sentido negativo; c) 10^8 m/s; d) $\frac{2\pi}{10}$ m; e) 9; f) $E_z(x,t) = 360\pi \text{ sen}(10^9 t + 10x)$]
- 7.15. Em um meio com índice de refração igual a 1,5, uma onda eletromagnética plana tem os campos $\vec{E} = 2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}y + 4\pi \times 10^{15}t\right)\hat{a}_z$ V/m e $\vec{B} = \vec{B}_0\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}y + 4\pi \times 10^{15}t\right)$ T. Determine: a) a direção e o sentido de propagação da onda; b) \vec{B}_0 (em módulo e direção); c) o comprimento de onda. [R. a) direção y , sentido negativo; b) $\vec{B}_0 = -10^{-8}\hat{a}_x$; 100 nm]
- 7.16. Considere uma onda plana com 100 V/m e frequência 300 MHz, caminhando num meio infinito, sem perdas, com $\epsilon_r = 9$ e $\mu_r = 1$. Se a onda está polarizada em x e caminha na direção z , sentido positivo, escreva as expressões completas no domínio do tempo para os vetores campo elétrico e campo magnético. Determine o vetor densidade de potência média. [R. $E_x(z,t) = 100\cos(6\pi \times 10^8 t - 6\pi z)$; $H_y(z,t) = \frac{10}{4\pi}\cos(6\pi \times 10^8 t - 6\pi z)$; $40\hat{a}_z$]
- 7.17. Uma onda eletromagnética caracterizada por $\vec{E} = E_0 e^{+\alpha y} \cos(\omega t + ky)\hat{a}_x$ V/m se propaga em um meio com perdas. Determine: a) o comprimento de onda nesse meio; b) a direção e o sentido em que a onda está se propagando; c) o valor aproximado de σ em termos de α , μ e ϵ , na situação em que a perda associada com α é devido à condutividade do meio e $\sigma \ll \omega\epsilon$. [R. c) $\sigma = 2\alpha\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$]
- 7.18. Uma onda plana em 100 MHz se propaga em um meio com perdas. A fase do campo elétrico varia de 90° numa distância de 0,5 m. O valor máximo do campo é reduzido de 25% em cada metro. Encontre: a) a constante de atenuação; b) a constante de fase; c) a velocidade de propagação. [R. a) 0,288 Np/m; b) π rad/m; c) 2×10^8 m/s]
- 7.19. Uma onda eletromagnética que se propaga na água do mar tem amplitude de 19,025 V/m na profundidade de 10 m e, na profundidade de 100 m, a amplitude é 12,13 V/m. Determine a constante de atenuação da água do mar. [R. 5×10^{-3} Np/m]
- 7.20. Considere que uma onda eletromagnética se propaga no solo seco ($\epsilon_r = 4$, $\sigma = 10^{-3}$ S/m). Encontre a distância na qual a amplitude do campo dessa onda é reduzida por um fator de $1/10^6$ de seu valor inicial. Encontre também a velocidade de propagação e o comprimento de onda nesse meio. Utilize as frequências de 15 kHz, 1,5 MHz e 150 MHz.
- 7.21. Em um meio dielétrico com $\mu_r = 1$ e $\epsilon_r = 3$, uma onda plana tem campo elétrico máximo igual a 6 V/m. Determine: a) a velocidade da onda; b) o valor máximo do vetor de Poynting; c) a impedância do meio; d) o valor máximo do campo magnético. [R. a) $1,73 \times 10^8$ m/s; 165,4 mW/m²; c) 217,2 Ω ; 27,6 mA/m]
- 7.22. Uma onda que se propaga em um meio não-magnético com $\epsilon_r = 9$ tem campo elétrico dado por $\vec{E} = [3\cos(\pi \times 10^7 t + kx)\hat{a}_y - 2\cos(\pi \times 10^7 t + kx)\hat{a}_z]$ V/m. Determine a direção e o sentido de propagação e a densidade média de potência carregada pela onda. [R. direção x , sentido negativo; $-0,052\hat{a}_x$ W/m²]
- 7.23. Um fio condutor ($\sigma = 5,1 \times 10^6$ S/m e $\mu_r = 200$) tem 300 m de comprimento e seção transversal de raio 2,5 mm. Se uma corrente $i(t) = 1,5 \times \cos(3 \times 10^4 t)$ A circula no condutor, determine: a) a espessura pelicular; b) a resistência para corrente alternada; c) a perda de potência média. [R. a) 0,228 mm; b) 16,42 Ω ; c) 18,47 W]

Linhas de Transmissão

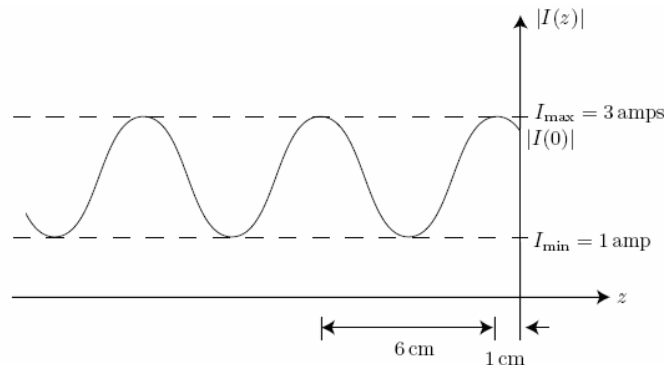
- 8.1. Determine a capacitância e a indutância por unidade de comprimento de um cabo coaxial RG-58U, cujo condutor interno tem raio igual a 0,406 mm e a malha externa tem raio 1,47 mm. O dielétrico tem permissividade relativa igual a 2,3.
- 8.2. A impedância característica de uma linha de transmissão uniforme e sem perdas pode ser obtida pela expressão $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \Omega$, em que L é a indutância da linha por unidade de comprimento e C é a capacitância da linha por unidade de comprimento. A partir do modelo equivalente em parâmetros concentrados para a linha sem perdas, obtenha essa expressão para a determinação da impedância característica.
- 8.3. Para uma linha de transmissão sem perdas, $\lambda = 20,7$ cm em 1 GHz. Encontre o ϵ_r do material isolante. [R. $\epsilon_r = 2,1$]
- 8.4. Em uma linha sem perdas, o material isolante tem $\epsilon_r = 4$. Se a capacitância da linha é 10 pF/m, encontre: a) a velocidade de fase; b) a indutância, em H/m; c) a impedância característica. [R. a) $1,5 \times 10^8$ m/s; b) 4,44 μ H/m; c) 666,7 Ω]
- 8.5. Uma linha de transmissão TEM, dielétrico ar, tem capacitância $10^{-10}/3$ [F/m]. Encontre: a) A indutância da linha por metro de comprimento. b) A impedância característica da linha. c) O coeficiente de reflexão na carga, se $R_L = 3 Z_0$. d) O coeficiente de reflexão na distância de um quarto do comprimento de onda de uma carga $R_L = 3 Z_0$. [R. a) 0,33 μ H/m; b) 100 Ω ; c) 0,5; d) -0,5]
- 8.6. Uma linha de 50 Ω , sem perdas, é terminada por uma carga de impedância $30 - j 200 \Omega$. Calcule o coeficiente de reflexão de tensão na carga. [R. $\Gamma_R = 0,93e^{-j27,5^\circ}$]
- 8.7. Em uma linha de transmissão sem perdas de 50 Ω , o material isolante tem $\epsilon_r = 2,25$. Quando terminada em um circuito-aberto, determine o comprimento que a linha deve ter para que sua impedância de entrada seja equivalente a um capacitor de 10 pF em 50 MHz. [R. 9,92 cm]
- 8.8. Se, no circuito da figura, $V^i(z_1) = 30e^{j30^\circ}$ V e $I^r(z_1) = -1e^{-j30^\circ}$ A, determine a impedância e a corrente instantânea na entrada. [R. $Z_{in} = 7,3 e^{j33^\circ}$; $i_{in}(t) = 3,6 \cos(\omega t - 73,9^\circ)$]



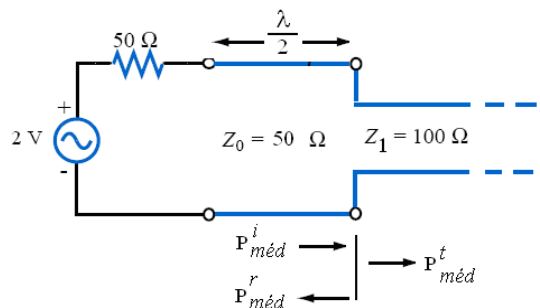
- 8.9. Para o sistema a seguir, determine: a) as velocidades de propagação das ondas de tensão e corrente em cada linha; b) o valor de X_s para que a corrente $i(t)$ esteja em fase com a tensão $v(t)$, ou seja, a impedância de entrada da linha de 100 Ω deve ser real; c) o valor máximo da corrente $i(t)$. [R. a) na linha de 1 m, $v = 10^8$ m/s, na linha de 0,4 m, $v = 0,8 \times 10^8$ m/s; b) 25 Ω ; c) 1,33 A]



- 8.10. A figura mostra o diagrama de onda estacionária de corrente para uma linha com impedância característica 50Ω , permeabilidade μ_0 e permissividade $\epsilon = 4\epsilon_0$. Determine: a) a frequência de excitação; b) o coeficiente de reflexão na carga; c) a impedância da carga, em ohms. [R. a) 1,25 GHz; b) $\Gamma_R = 0,5e^{-j120^\circ}$; c) $Z_R = 21,4 - j24,7 \Omega$]



- 8.11. Em uma linha de dois condutores, que é terminada com uma televisão A, o coeficiente de onda estacionária é igual a 5,8. Quando A é substituída por uma televisão B, o coeficiente de onda estacionária é 1,5. Determine o percentual da potência incidente que é refletida pelas cargas A e B. [R. TV A: 50%; TV B: 4%]
- 8.12. As linhas no circuito da figura não têm perdas. Calcule os valores médios no tempo para as potências incidente, refletida e transmitida na linha de 100Ω , que é considerada infinita. [R. $P^i = 10 \text{ mW}$, $P^r = 1,1 \text{ mW}$, $P^t = 8,9 \text{ mW}$]



- 8.13. Uma antena dipolo de $\lambda/2$ é conectada a uma fonte de tensão (10 V, 100 MHz e impedância interna 50Ω) por meio de uma linha de transmissão de 3,6 m de comprimento, impedância característica 300Ω e velocidade de propagação $2,6 \times 10^8 \text{ m/s}$. Em 100 MHz, o dipolo pode ser representado por uma resistência de 73Ω em série com reatância indutiva de $42,5 \Omega$. A potência média dissipada na resistência de 73Ω é igual à potência radiada para o espaço pela antena. Determine a potência média radiada pela antena com e sem o uso da linha de transmissão e o VSWR na linha. [R. 91,1 mW e 215,46 mW]