

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

---

# Eletromagnetismo 1

---

*Aluno:*

Filipe Ribeiro - [delta3249@gmail.com](mailto:delta3249@gmail.com)

*Blog:*

[Engenheiro Vegetativo](#)

BRASILIA - DF  
24 de novembro de 2013

# Sumário

<b>1</b>	<b>Análise Vetorial</b>	<b>2</b>
1.1	Campo Vetorial e Escalar	2
1.2	Algebra Vetorial	2
1.2.1	Soma	2
1.2.2	Produto	3
1.2.3	Decomposição de vetores	4
1.3	Sistemas de Coordenadas	5
1.3.1	Coordenadas Cartesianas ou Retangulares	6
1.3.2	Coordenadas Cilíndricas	6
1.3.3	Coordenadas Esféricas	7
1.4	Transformação de coordenadas e vetores	8
1.4.1	Cartesianas-Cilíndricas	8
1.4.2	Cilíndricas-Esféricas	10
1.4.3	Cartesianas-Esféricas	11
1.4.4	Apêndice - Cossenos Diretores	11
1.5	Integrais	12
1.5.1	Integral de linha de uma função	12
1.5.2	Integral de linha de um vetor	14
1.5.3	Integral de superfície	16
1.5.4	Integral de volume	17
1.6	Operações diferenciais com vetores	17
1.6.1	Gradiente	17
1.6.2	Operador Nabla	19
1.6.3	Divergente	19
1.6.4	Rotacional	20
1.7	Identities vetoriais	20
1.8	Alguns teoremas da análise vetorial	20
1.8.1	Teorema de Gauss	20
1.8.2	Teorema de Stokes	20
1.8.3	Identities de Green	20
1.8.4	Teorema de Helmholtz	20

# 1 Análise Vetorial

## 1.1 Campo Vetorial e Escalar

O eletromagnetismo lida essencialmente com grandezas escalares e vetoriais. Por grandeza escalar, entende-se uma grandeza física que possa ser quantificada por um único parâmetro, como por exemplo, a massa de um objeto ou a carga de um corpo carregado. Uma grandeza vetorial, por outro lado, requer parâmetros adicionais para uma mais completa especificação, como por exemplo, magnitude, linha de ação e sentido. Esse é o caso, por exemplo, da velocidade de um objeto em movimento. Um outro conceito que surge no estudo de eletromagnetismo é o de campo. Na maioria das situações de interesse o campo é uma forma conveniente de representação do efeito produzido por uma fonte física em cada ponto de espaço, a cada instante de tempo.

O campo será escalar ou vetorial, se a grandeza física a ele associada for de natureza escalar ou vetorial, respectivamente.

O estudo detalhado do eletromagnetismo requer familiaridade com as propriedades de vetores, escalares e de campos escalares e vetoriais. Algumas destas propriedades são examinadas a seguir.

## 1.2 Álgebra Vetorial

Um **vetor** é representado geometricamente por um segmento de reta orientado conforme ilustrado na Figura 1, onde o comprimento da seta é proporcional a magnitude do vetor, e a orientação da seta indica a direção e sentido do vetor.



Fig.1.1 Representação geométrica de um vetor

Figura 1: Vetor

Vetores satisfazem algumas propriedades quanto a soma e produto, descritas a seguir:

### 1.2.1 Soma

A soma de vetores é realizada geometricamente, a partir do deslocamento paralelo de um dos vetores até a extremidade do outro, conforme ilustrado na Fig.1.2. O vetor resultante se estende na direção da diagonal do paralelogramo formado pelos dois vetores. A partir dessa definição, a soma de vetores satisfaz as propriedades:

- Comutatividade:  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
- Associatividade:  $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

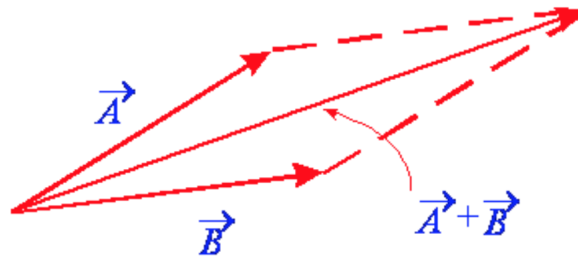


Figura 2: Soma de Vetores

### 1.2.2 Produto

Outro tipo de operação entre vetores é o produto, que pode resultar em uma grandeza escalar ou vetorial.

**Produto escalar:** O produto escalar entre dois vetores é definido por:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos(\alpha) \quad (1)$$

onde  $|\vec{A}|$  e  $|\vec{B}|$  são as magnitudes dos vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , respectivamente, e  $\alpha$  é o menor dos ângulos entre eles. A partir dessa definição, a magnitude de um vetor pode ser obtida da relação:

$$|\vec{A}| = (\vec{A} \bullet \vec{A})^{1/2} \quad (2)$$

A operação produto escalar, satisfaz algumas propriedades, tais como:

- Comutatividade:  $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$
- Distributividade:  $\vec{A} \bullet (\vec{B} \bullet \vec{C}) = (\vec{A} \bullet \vec{B}) \bullet \vec{C}$

**Produto Vetorial:** Este tipo de produto gera como resultado um vetor. Define-se esta operação pela relação:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin(\alpha)) \hat{u} \quad (3)$$

onde, conforme ilustrado na Figura 3 é o menor dos ângulos entre os vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ ,  $\hat{u}$  é um vetor de magnitude unitária, perpendicular ao plano que contém os vetores, e cujo sentido é aquele do polegar, quando simula-se com a mão direita a rotação do vetor  $\vec{A}$  direção ao vetor  $\vec{B}$ . Algumas das

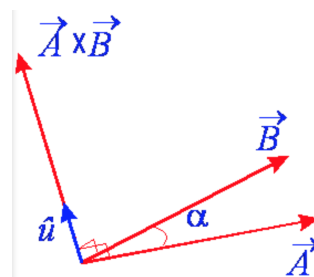


Figura 3: Produto Vetorial

propriedades satisfeitas pelo produto vetorial seguem diretamente da definição e das propriedades de soma de vetores. Duas dessas são:

- Anti-comutatividade:  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- Distributividade:  $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

### 1.2.3 Decomposição de vetores

No espaço tridimensional, um vetor arbitrário pode ser especificado em termos de três vetores ortogonais. Quando esses vetores possuem magnitude unitária eles formam uma base ortonormal no espaço tridimensional. Uma base ortonormal de vetores  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{a}_2$  e  $\hat{a}_3$  satisfaz as seguintes propriedades:

$$\hat{a}_i \bullet \hat{a}_j = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3, 4 \dots \quad (4)$$

A base ortonormal é também uma base cíclica de vetores se:

$$\hat{a}_i \times \hat{a}_j = \epsilon_{ijk} \hat{a}_k$$

onde:

$$\epsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } i \neq j \neq k \neq i \text{ e } i, j, k \text{ formam uma permutação } \mathbf{cíclica} \text{ a partir da sequência } 123 \\ -1, & \text{se } i \neq j \neq k \neq i \text{ e } i, j, k \text{ formam uma permutação } \mathbf{acíclica} \text{ a partir da sequência } 123 \end{cases}$$

Uma seqüência cíclica a partir de 123 gera como resultado as combinações, 231, 312, etc. Uma seqüência acíclica é obtida trocando-se um dos índices da seqüência cíclica, como por exemplo, a seqüência 213.

A decomposição de um vetor  $\vec{A}$  em uma base cíclica ortonormal requer a determinação dos coeficientes  $A_1, A_2$  e  $A_3$ , tal que:

$$\vec{A} = A_1 \hat{a}_1 + A_2 \hat{a}_2 + A_3 \hat{a}_3 \quad (5)$$

Os coeficientes da decomposição são denominados de **projeções** do vetor  $\vec{A}$  nos vetores de base, e essas projeções são obtidas simplesmente a partir da operação **produto escalar** com cada vetor de base. Por exemplo, a projeção  $A_1$  é obtida do produto escalar

$$\vec{A} \bullet \hat{a}_1 = (A_1 \hat{a}_1 + A_2 \hat{a}_2 + A_3 \hat{a}_3) \bullet \hat{a}_1 = A_1 \hat{a}_1 \bullet \hat{a}_1 + A_2 \hat{a}_2 \bullet \hat{a}_1 + A_3 \hat{a}_3 \bullet \hat{a}_1 = A_1$$

Realizando-se a mesma operação com os outros vetores de base, obtém-se:

$$A_i = \vec{A} \bullet \hat{a}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Utilizando-se a decomposição de vetores em uma base cíclica ortonormal, as operações de soma, produto escalar e produto vetorial entre dois vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  podem ser representadas respectivamente por,

$$\vec{A} + \vec{B} = \sum_{i=1}^3 (A_i + B_i) \hat{a}_i,$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i \cdot B_i \text{ e}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_i \cdot B_j (\hat{a}_i \times \hat{a}_j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_i \cdot B_j \cdot \hat{a}_k$$

Para o produto vetorial, a soma resulta em:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \hat{a}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \hat{a}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \hat{a}_3 \quad (6)$$

que também pode ser posta na forma de um determinante,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{vmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \hat{a}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (7)$$

Pode-se simplificar a notação de somatório utilizada nas várias operações descritas anteriormente, convencionando-se que a ocorrência de índices repetidos no segundo membro dessas operações indique somatório no índice correspondente. Por exemplo, na operação produto escalar, pode-se representar o resultado na forma simplificada

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_i \cdot B_i \quad (8)$$

onde a dupla ocorrência do índice  $i$  no segundo membro da Equação 8 indica  $\sum_{i=1}^3$ . No caso do produto vetorial a representação simplificada é da forma

$$\vec{A} \times \vec{B} = \epsilon_{ijk} A_i \cdot B_j \cdot \hat{a}_k \quad (9)$$

onde a dupla ocorrência dos índices  $i, j$  e  $k$ , no segundo membro indica a soma tripla  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3$ .

### 1.3 Sistemas de Coordenadas

Em problemas de teoria de campo, a escolha de um sistema de coordenadas adequado é fundamental para obtenção de representações simplificadas dos campos envolvidos. O sistema mais adequado é geralmente determinado levando-se em conta a geometria da região de existência dos campos. Vários sistemas de coordenadas podem ser definidos para atender uma larga gama de situações. Os três sistemas de coordenadas mais comuns e freqüentemente utilizados no estudo de

eletromagnetismo serão tratados no texto, e esses são descritos a seguir.

### 1.3.1 Coordenadas Cartesianas ou Retangulares

Neste sistema, as coordenadas de um ponto no espaço são definidas a partir de três eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , perpendiculares aos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 4. Qualquer vetor neste sistema de coordenadas pode ser representado como combinação linear dos três vetores unitários,  $\hat{a}_1 = \hat{a}_x$ ,  $\hat{a}_2 = \hat{a}_y$ ,  $\hat{a}_3 = \hat{a}_z$ , paralelos aos eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente. A origem do sistema cartesiano é a interseção dos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ . A localização de um ponto no espaço pode ser representada pelo vetor posição:

$$\vec{X} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z \quad (10)$$

sendo uma das extremidades na origem do sistema, conforme ilustrado na Figura 4. A distância do ponto  $P$  a origem é obtida de,

$$|\vec{X}| = [(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z) \bullet (x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z)]^{1/2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (11)$$

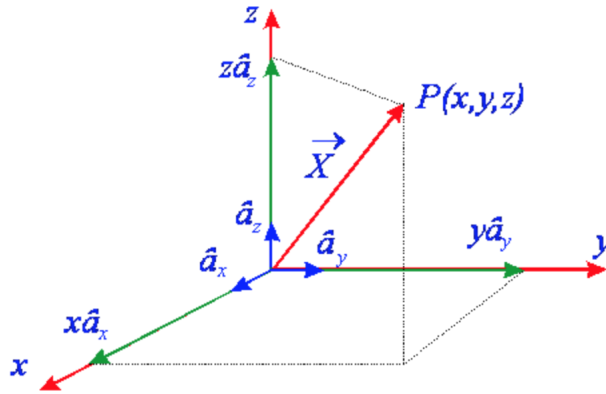


Figura 4: Representação de um ponto e vetores de base no sistema de coordenadas cartesianas.

### 1.3.2 Coordenadas Cilíndricas

Neste sistema as coordenadas de um ponto no espaço são representadas pelos parâmetros:

$r$  = distância até a origem da projeção do ponto no plano  $xy$ .

$\phi$  = ângulo azimutal, que representa o desvio angular do vetor projeção no plano  $xy$  relativamente ao eixo  $x$ .

$z$  = coordenada axial do ponto.

A base de vetores neste sistema é formada pelos vetores unitários ortogonais as superfícies,

$r = \text{constante}$ , que representa a equação de uma superfície cilíndrica,

$\phi = \text{constante}$ , que representa a equação de um semi-plano,

$z = \text{constante}$ , que representa a equação de um plano.

Essas superfícies e os vetores unitários correspondentes,

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_r, \hat{a}_2 = \hat{a}_\phi, \hat{a}_3 = \hat{a}_z \quad (12)$$

estão representados na Fig.5. É importante observar que a seqüência de vetores unitários da base deste sistema, está escrita na forma de uma seqüência cíclica, conforme definido anteriormente. Notemos também que diferentemente do que ocorre com os vetores de base do sistema de coordenadas cartesianas, neste sistema os dois primeiros vetores de base variam com a coordenada  $\phi$ .

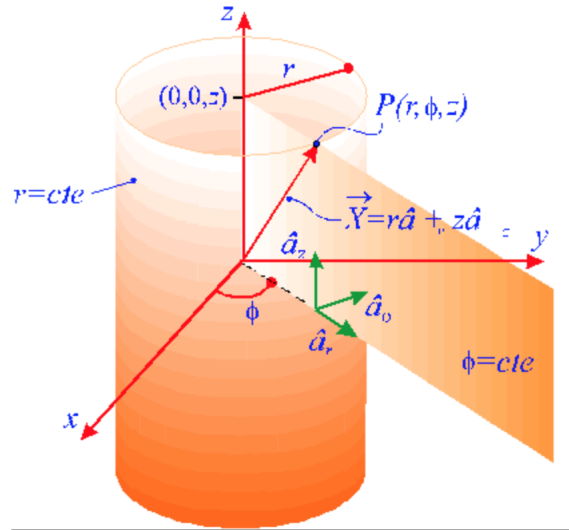


Figura 5: Vetores de base e superfícies coordenadas do sistema de coordenadas cilíndricas.

Vídeo

### 1.3.3 Coordenadas Esféricas

As coordenadas de um ponto neste sistema de coordenadas são representadas pelos parâmetros ilustrados na Fig.1.6, a saber:

$R$  = distância do ponto à origem,

$\theta$  = ângulo polar, que representa o desvio angular do vetor posição em relação ao eixo  $z$ ,

$\phi$  = ângulo azimutal, comum ao sistema de coordenadas cilíndricas.

A base deste sistema é formada pelos vetores,

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_R, \hat{a}_2 = \hat{a}_\theta, \hat{a}_3 = \hat{a}_\phi \quad (13)$$

que são perpendiculares as superfícies,

$R = \text{constante}$ , que representa a superfície de uma esfera.

$\theta = \text{constante}$ , que representa a superfície de um cone.

$\phi = \text{constante}$ , que representa a superfície de um semi-plano.



O espaço tridimensional é gerado pelas condições,  $R \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi < 2\pi$ . As superfícies coordenadas, bem como os vetores de base estão ilustrados na Fig. 6. Neste sistema de coordenadas, o vetor posição é representado por  $\vec{X} = R\hat{a}_R$ .

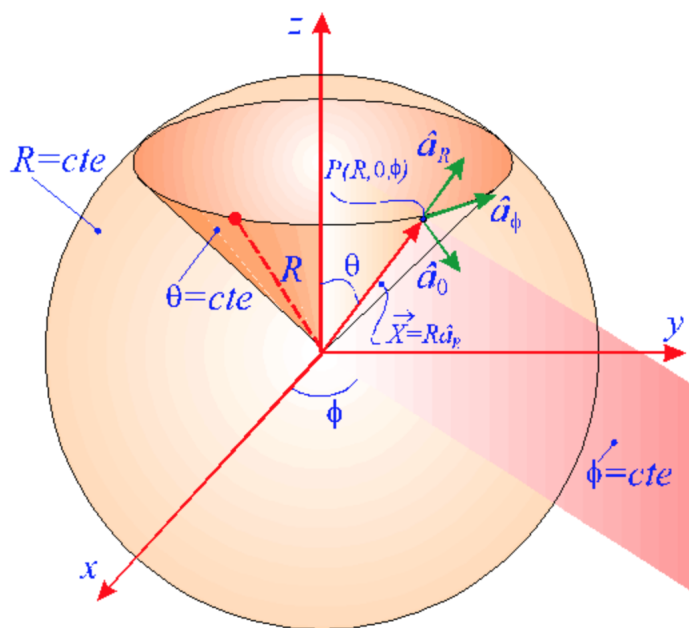


Figura 6: Base de vetores e superfícies coordenadas do sistema de coordenadas esféricas.

Vídeo

## 1.4 Transformação de coordenadas e vetores

### 1.4.1 Cartesianas-Cilíndricas

Existem situações em que torna-se necessária a transformação de vetores e coordenadas de um sistema de coordenadas para outro. Considere-se inicialmente um vetor  $\vec{A}$  representado no sistema de coordenadas cartesianas. Qual seria a representação desse vetor, por exemplo, no sistema de coordenadas cilíndricas?

Essa questão pode ser resolvida com o emprego das propriedades básicas de vetores. Para isso, seja  $\vec{A}$  da forma

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$$

O objetivo é determinar as componentes  $A_r$ ,  $A_\phi$ ,  $A_z$  de forma que o vetor  $\vec{A}$  assumira a representação

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\phi \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z$$

As componentes incógnitas podem ser obtidas pelo cálculo das projeções

$$\begin{aligned}
A_r &= \vec{A} \cdot \hat{a}_r = A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_r + A_y \hat{a}_y \cdot \hat{a}_r + A_z \hat{a}_z \cdot \hat{a}_r = A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_r + A_y \hat{a}_y \cdot \hat{a}_r, \\
A_\phi &= \vec{A} \cdot \hat{a}_\phi = A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_\phi + A_y \hat{a}_y \cdot \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z \cdot \hat{a}_\phi = A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_\phi + A_y \hat{a}_y \cdot \hat{a}_\phi, \\
A_z &= \vec{A} \cdot \hat{a}_z = A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z + A_y \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z + A_z \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = A_z
\end{aligned}$$

Os produtos escalares entre vetores unitários nessas últimas expressões, são obtidos com base na Fig.7, resultando em,

$$\begin{aligned}
\hat{a}_x \cdot \hat{a}_r &= \cos \phi, \quad \hat{a}_x \cdot \hat{a}_\phi = \cos(\pi/2 + \phi) = -\text{sen} \phi, \\
\hat{a}_y \cdot \hat{a}_r &= \cos(\pi/2 + \phi) = \text{sen} \phi, \quad \hat{a}_y \cdot \hat{a}_\phi = \cos \phi
\end{aligned}$$

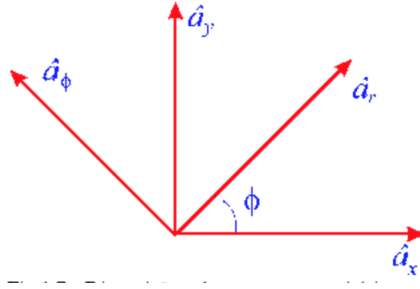


Figura 7: Disposições dos Vetores bases - coordenadas cartesianas e cilíndricas

Esse sistema de equações lineares relacionando as projeções no sistema de coordenadas cilíndricas àquelas correspondentes ao sistema de coordenadas cartesianas pode ser posto na forma matricial

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (14)$$

e essa forma matricial determina a lei de transformação de vetores entre os dois sistemas. Pode-se representar a lei de transformação através da equação matricial:

$$\tilde{A}_{r\phi z} = \tilde{T}(\phi) \tilde{A}_{xyz} \quad (15)$$

Nas Eqs.14 e 15, foi introduzida a representação matricial de vetores em um sistema de coordenadas. Como se pode observar na Fig.7, o efeito da matriz  $\tilde{T}$  é produzir uma rotação do sistema  $xy$ , de radianos no sentido anti-horário, em torno do eixo  $z$ . A matriz  $\tilde{T}$  possui um determinante unitário e sua **inversa é igual a sua transposta**. Essa matriz é portanto uma matriz unitária e satisfaz a relação  $\tilde{T}\tilde{T}^t = I$ , onde  $I$  é a matriz identidade.

Matrizes de transformação resultantes de rotação ou translação de eixos são unitárias, pois essas transformações não alteram a magnitude de um vetor ou mesmo a orientação relativa entre vetores. Para demonstração dessa afirmativa, seja a operação produto escalar entre vetores, que na representação matricial assume a forma:

*Demonstração.*

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = (A_1 \ A_2 \ A_3) \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Transformações de rotação ou translação de eixos não alteram a magnitude e orientação relativa de vetores e se tal transformação for representada pela matriz  $\tilde{M}$ , tal que

$$\tilde{A}' = \tilde{M}\tilde{A}, \quad \tilde{B}' = \tilde{M}\tilde{B} \quad (17)$$

o produto escalar no novo sistema de coordenadas pode também ser escrito como,

$$\vec{A} \bullet \vec{B} \equiv \vec{A}' \bullet \vec{B}' = \tilde{A}' \tilde{B}' = (\tilde{M}\tilde{A})^t (\tilde{M}\tilde{B}) = \tilde{A}'^t \tilde{M}^t \tilde{M} \tilde{B} \quad (18)$$

Igualando-se as Eqs.16 e 18, resulta,

$$\tilde{A}'^t \tilde{M}^t \tilde{M} \tilde{B} = \tilde{A}'^t \tilde{B}$$

e essa última relação só se verifica se a matriz satisfizer a propriedade:

$$\tilde{M}^t \tilde{M} = I$$

□

### 1.4.2 Cilíndricas-Esféricas

Seguindo o procedimento descrito na seção anterior, considere-se agora o vetor  $\vec{A}$  expresso em coordenadas cilíndricas e a obtenção de sua representação em coordenadas esféricas. Seja portanto,

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\phi \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z$$

e quer-se determinar a representação correspondente em coordenadas esféricas

$$\vec{A} = A_R \hat{a}_R + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi$$

Seguindo as etapas já descritas na seção anterior, e com base na Fig.8, obtém-se

$$\begin{pmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen}\theta & 0 & \text{cos}\theta \\ \text{cos}\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} \equiv \tilde{A}_{R\theta\phi} = \tilde{S}(\theta) \tilde{A}_{r\phi z} \quad (19)$$

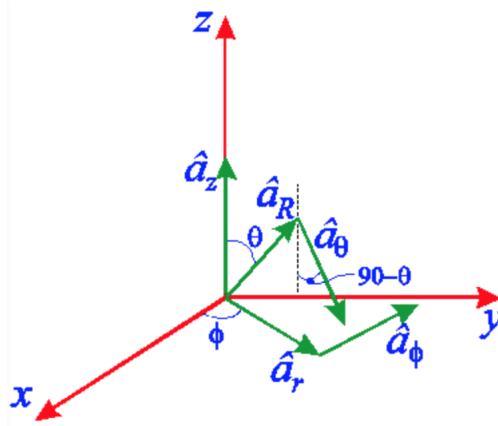


Figura 8: Disposições dos Vetores bases - coordenadas cilíndricas e esféricas

### 1.4.3 Cartesianas-Esféricas

Essa transformação é obtida pela aplicação sucessiva das transformações anteriores, ou seja,

$$\tilde{A}_{R\theta\phi} = \tilde{S}(\theta)\tilde{A}_{r\phi z} \quad (20)$$

$$\tilde{A}_{r\phi z} = \tilde{T}(\phi)\tilde{A}_{xyz} \Rightarrow \boxed{\tilde{A}_{R\theta\phi} = \tilde{S}(\theta)\tilde{T}(\phi)\tilde{A}_{xyz}} \quad (21)$$

e a transformação inversa é simplesmente,

$$\tilde{A}_{xyz} = [\tilde{T}(\phi)]^t[\tilde{S}(\theta)]^t\tilde{A}_{R\theta\phi}$$

### 1.4.4 Apêndice - Cossenos Diretores

Como mostra a figura a seguir (Fig.9), a projeção  $x$  da distância escalar  $r$  sobre o eixo- $x$  é igual a  $R\cos\alpha$ , em que  $\alpha$  é o ângulo entre  $r$  e o eixo- $x$ . A projeção de  $r$  no eixo- $y$  é  $r\cos\alpha$  e sobre o eixo- $z$ ,  $R\cos\alpha$ . Note que  $\gamma = \theta$ , então  $\cos\gamma = \cos\theta$ .

As quantidades  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$  e  $\cos\gamma$  são denominadas **cossenos diretores** e satisfazem a relação  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ .

A distância escalar  $R$  do sistema esférico se relaciona com as distâncias no sistema retangular por:

$$\begin{aligned} x &= R.\cos\alpha = R.\text{sen}\theta\cos\phi \\ y &= R.\cos\beta = R.\text{sen}\theta\text{sen}\phi \\ z &= R.\cos\gamma = R.\cos\theta \end{aligned}$$

Das relações anteriores, obtêm-se os cossenos diretores:

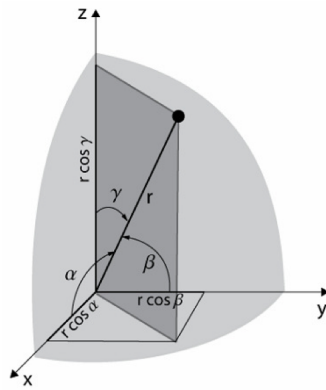


Figura 9: Cossenos diretores

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{r} \\ \cos\beta &= \frac{y}{r} \\ \cos\gamma &= \frac{z}{r} \end{aligned}$$

## 1.5 Integrais

Em eletromagnetismo operações de integração e diferenciação são geralmente efetuadas no espaço tridimensional e envolvem campos escalares e vetoriais. Essas operações são revisadas a seguir.

### 1.5.1 Integral de linha de uma função

Seja  $f(x, y, z)$  uma função definida em uma região do espaço tridimensional e uma curva ou caminho  $C$  contida nessa região. A equação de uma curva no espaço tridimensional é obtida a partir da interseção de duas superfícies, cada uma representada por uma relação entre coordenadas do tipo,

$$S(x, y, z) = 0$$

onde  $S$  é uma função arbitrária das variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Conseqüentemente, uma curva no espaço tridimensional corresponde a solução do sistema de equações

$$C \equiv \begin{cases} S_1(x, y, z) = 0 \\ S_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Define-se a integral de linha de  $f$  sobre  $C$ , com respeito a variável  $x$ , pela relação

$$\int_C f(x, y, z) dx$$

onde o subscrito  $C$  sob o sinal de integração implica que a função escalar  $f(x, y, z)$  é calculada sobre os pontos compondo o caminho  $C$ , resultando em uma função  $f_C(x, y, z)$ . Portanto, para efetuar-se esta integração é necessária a utilização do sistema de equações definindo a curva  $C$ , o que implica:

Definições semelhantes se aplicam a integrais de linha com respeito as variáveis  $y$  e  $z$  ou com respeito a variáveis compondo sistemas de coordenadas curvilíneas em geral.

**Exemplo 1.1.** Seja a função  $f(x, y, z) = 2x + y + z^2$  e o caminho  $C$ , limitado pelos pontos  $(0, 0, 0)$  e  $(1, 1, 1)$  e definido pela interseção entre os planos,

$$y = x$$

$$z = y$$

Para calcular a integral de  $f$  sobre  $C$  com respeito a variável  $y$ , utilizam-se as duas equações anteriores para obter,

$$f_C = 2y + y + y^2 = 3y + y^2$$

$$\text{e portanto } \int_C f(x, y, z) = \int_0^1 (3y + y^2) dy = 11/6.$$

A integral de linha com respeito a uma das coordenadas do caminho é apenas um caso particular da situação mais geral envolvendo a integração com respeito ao **deslocamento ao longo** do caminho. Seja  $l$  uma variável que mede o comprimento ao longo da curva  $C$ . A integral de linha de  $f$  sobre  $C$  com respeito a variável  $l$  é definida pela relação,

$$\int_C f(x, y, z) dl$$

É possível reduzir-se essa última expressão para uma integral com respeito a uma das variáveis do sistema de coordenadas considerado, no caso, o sistema de coordenadas cartesianas. Para isso, seja o vetor  $\vec{dl}$  tendo magnitude  $|\vec{dl}|$  e direção tangente a curva  $C$ . Sua decomposição em coordenadas cartesianas é dada por:

$$\vec{dl} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z \quad (22)$$

Para efetuar-se o cálculo da integral com respeito a variável  $x$ , por exemplo, calcula-se o efeito de um pequeno incremento  $dx$  sobre as coordenadas  $y$  e  $z$  da curva  $C$ , resultando em,

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx.$$

portanto,

$$\begin{aligned} \vec{dl} &= dx \left( \hat{a}_x + \frac{\partial y}{\partial x} \hat{a}_y + \frac{\partial z}{\partial x} \hat{a}_z \right) \\ |\vec{dl}| &= \sqrt{\vec{dl} \bullet \vec{dl}} = dx \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

e a integração com respeito a variável  $l$  reduz-se a,

$$\int_C f(x, y, z) dl = \int_C f(x, y, z) \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (23)$$

No cálculo dessa última integral, é necessário expressar-se as variáveis  $y$  e  $z$  em termos da variável  $x$ , o que equivale ao cálculo da função  $f$  sobre a curva  $C$ .

### 1.5.2 Integral de linha de um vetor

A função escalar no integrando da integral de linha pode representar uma das componentes de um campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z)$ . Seja um caminho  $C$  e um vetor  $\hat{t}$  tangente a curva  $C$  em cada um de seus pontos. Define-se a integral de linha da projeção de  $\vec{F}$  sobre  $C$  por,

$$\int_C (\vec{F} \cdot \hat{t}) dl.$$

Dados  $dl$  e  $\hat{t}$ , define-se o vetor deslocamento diferencial ao longo da curva por,  $\vec{dl} = dl\hat{t}$ , e a última integral pode ser posta na forma,

$$\int_C (\vec{F} \cdot \hat{t}) dl = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dl}.$$

Para um caminho formando uma curva fechada, denota-se

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dl} \quad (24)$$

Essa última integral é também denominada de circulação de  $\vec{F}$  sobre  $C$ . A decomposição do vetor deslocamento diferencial nos sistemas de coordenadas cilíndrica e esférica é obtida com base nas Figs. 10a e 10b e a integral de linha de um vetor, nos três sistemas de coordenadas considerados, pode ser expressa como a soma de integrais com respeito a uma única variável conforme mostrado a seguir,

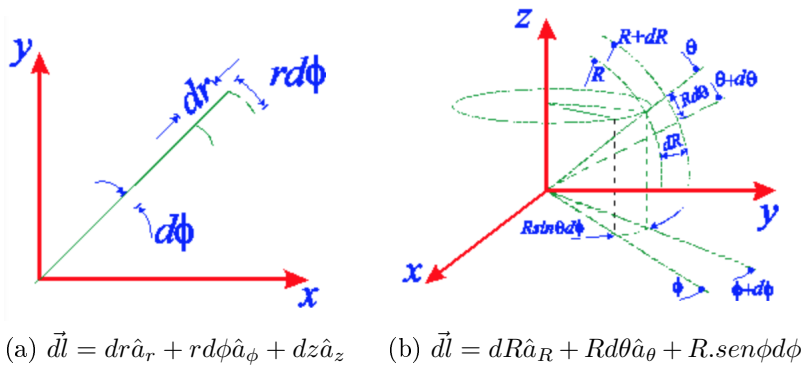


Figura 10: (a) Projeções no plano xy do vetor deslocamento diferencial no sistema de coordenadas cilíndricas. (b) Componentes do vetor deslocamento diferencial no sistema de coordenadas esféricas.

- **Cartesianas**

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_C F_x dx + \int_C F_y dy + \int_C F_z dz$$

- **Cilíndricas**

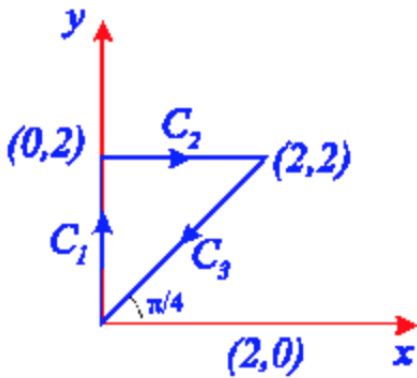
$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_C F_r dr + \int_C F_\phi r d\phi + \int_C F_z dz$$

• Esféricas

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_C F_R dR + \int_C F_\theta R d\theta + \int_C F_\phi R \cdot \text{sen}\theta d\phi$$

**Exemplo 1.2.** Para o caminho fechado  $C$  mostrado na Fig.11 calcular a circulação do campo vectorial,  $\vec{F} = xy\hat{x} + y^2\hat{y}$  em coordenadas cilíndricas.

Primeiramente transforma-se  $\vec{F}$  utilizando-se a matriz de transformação dada pela Eq.nº 15:



$$\begin{aligned} \tilde{F}_{r\phi z} &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xy\cos\phi + y^2\text{sen}\phi \\ -xy\text{sen}\phi + y^2\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2\text{sen}\phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Figura 11

onde fez-se uso das transformações de coordenadas,

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\text{sen}\phi$$

Portanto em coordenadas cilíndricas,

$$\vec{F} = r^2 \cdot \text{sen}\phi \hat{a}_r \quad (25)$$

Com base na Fig.11, utilizando a equação (25), as equações para os caminhos 1, 2 e 3 em coordenadas cilíndricas são

$$C_1 : \begin{cases} z = 0 \\ \phi = \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 2 \\ d\vec{l} = dr\hat{a}_r \end{cases}, C_2 : \begin{cases} z = 0 \\ \pi/4 \leq \phi \leq \pi/2 \\ r \cdot \text{sen}\phi = 2 \\ d\vec{l} = dr\hat{a}_r + r d\phi\hat{a}_\phi \end{cases}, C_3 : \begin{cases} z = 0 \\ \phi = \pi/4 \\ 2\sqrt{2} \leq r \leq 0 \\ d\vec{l} = dr\hat{a}_r \end{cases}$$

portanto, Sobre os três caminhos, tem-se

$$C_1 : F_r = r^2, \quad C_2 : F_r = r^2 \cdot 2/r = 2r, \quad C_3 : F_r = r^2 \cdot \text{sen}(\pi/4) = r^2/\sqrt{2}.$$



resultando em

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^2 r^2 dr + \int_2^{2\sqrt{2}} 2r dr + \int_{2\sqrt{2}}^0 \frac{r^2}{\sqrt{2}} dr = 4/3.$$

### 1.5.3 Integral de superfície

A integral de uma função sobre uma superfície é uma extensão do caso unidimensional. Seja  $S$  uma superfície e  $f(x, y, z)$  uma função escalar. Seja  $f_S(x, y, z)$  o valor dessa função calculada sobre pontos da superfície. Define-se a integral de superfície de  $f$  como sendo

$$\int_S f_S(x, y, z) dS$$

onde  $dS$  é um elemento diferencial de área sobre a superfície  $S$ . Se  $f_s$  é a projeção de um campo vetorial  $\vec{F}$  ao longo da direção normal à superfície, denota-se,

$$\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

como sendo o fluxo do vetor  $\vec{F}$  através de  $S$ , onde  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal a superfície em cada ponto. Se a superfície é fechada, e o vetor aponta para fora do volume limitado por  $S$ , denota-se,

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

como sendo o fluxo líquido de  $\vec{F}$  para fora da região limitada por  $S$ . Note-se que se o vetor  $\vec{F}$  for tangente à superfície em todos os pontos, então o fluxo líquido é nulo. Será mostrado adiante que o cálculo do fluxo de um campo vetorial para fora de um volume limitado por uma superfície  $S$  auxilia na determinação de fontes de campo no interior do volume considerado.

É conveniente incorporar-se o caráter vetorial do vetor normal à superfície diretamente no elemento diferencial de área  $dS$ . Para isso, define-se um vetor área diferencial em cada ponto da superfície por,  $d\vec{S} = \hat{n}dS$ .

O vetor  $d\vec{S}$ , apontando em um dado sentido, tem magnitude igual ao produto de comprimentos diferenciais ao longo da superfície, e conseqüentemente as representações desse vetor nos três sistemas de coordenadas aqui considerados são dadas por:

- **Cartesianas:**  $d\vec{S} = dy dz \hat{a}_x + dx dz \hat{a}_y + dx dy \hat{a}_z$
- **Cilíndricas:**  $d\vec{S} = r.d\phi dz \hat{a}_r + dr dz \hat{a}_\phi + r.dr d\phi \hat{a}_z$
- **Esféricas:**  $d\vec{S} = R^2 .sen\theta d\theta d\phi \hat{a}_R + R.sen\theta dR d\phi \hat{a}_\theta + R.dR d\theta \hat{a}_\phi$

### 1.5.4 Integral de volume

A integral de uma função ou vetor em um volume ocorre freqüentemente no estudo de Eletromagnetismo e em outras áreas da Física. Seja  $f$  uma função escalar e um campo vetorial,  $V$  um volume no espaço tridimensional e  $dV$  um volume diferencial. Denotam-se:

$$\int_V f dV, \int_V \vec{F} dV \quad (26)$$

como sendo as integrais de volume das grandezas  $f$  e  $\vec{F}$ , respectivamente. A escolha mais adequada para representação do elemento diferencial de volume depende da geometria do volume de integração. O elemento diferencial  $dV$  é o produto de três comprimentos diferenciais, e as representações correspondentes nos três sistemas de coordenadas são:

- **Cartesianas:**  $dV = dx dy dz$
- **Cilíndricas:**  $dV = r.dr d\phi dz$
- **Esféricas:**  $dV = R^2 .sen\theta dR d\theta d\phi$

## 1.6 Operações diferenciais com vetores

### 1.6.1 Gradiente

Seja uma superfície descrita no sistema de coordenadas cartesianas pela equação  $f(x, y, z) = C$ . Na Fig.12a estão ilustradas duas superfícies adjacentes  $S_1$  e  $S_2$ , descritas respectivamente pelas equações,

$$S_1 : f(x, y, z) = C \quad S_2 : f(x, y, z) = C + dC$$

onde  $dC > 0$  é um pequeno incremento diferencial na constante  $C$ . O deslocamento do ponto  $P$  para o ponto  $Q$  ilustrados na Fig.12a, é representado pelo vetor deslocamento diferencial,

$$\vec{dl} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z$$

A variação  $df$ , na função  $f$ , devido a esse deslocamento pode ser obtida utilizando-se o termo em primeira ordem de uma expansão de Taylor para funções de três variáveis

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (27)$$

onde

$$\vec{\nabla} f = \left( \hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (28)$$

sobre a função  $f$ , gerando como resultado um vetor.

Para pontos  $P$  e  $Q$  bem próximos e situados sobre  $S_1$  conforme ilustrado na Fig.12b, a variação na função  $f$  é,  $df = 0$ , isto é,

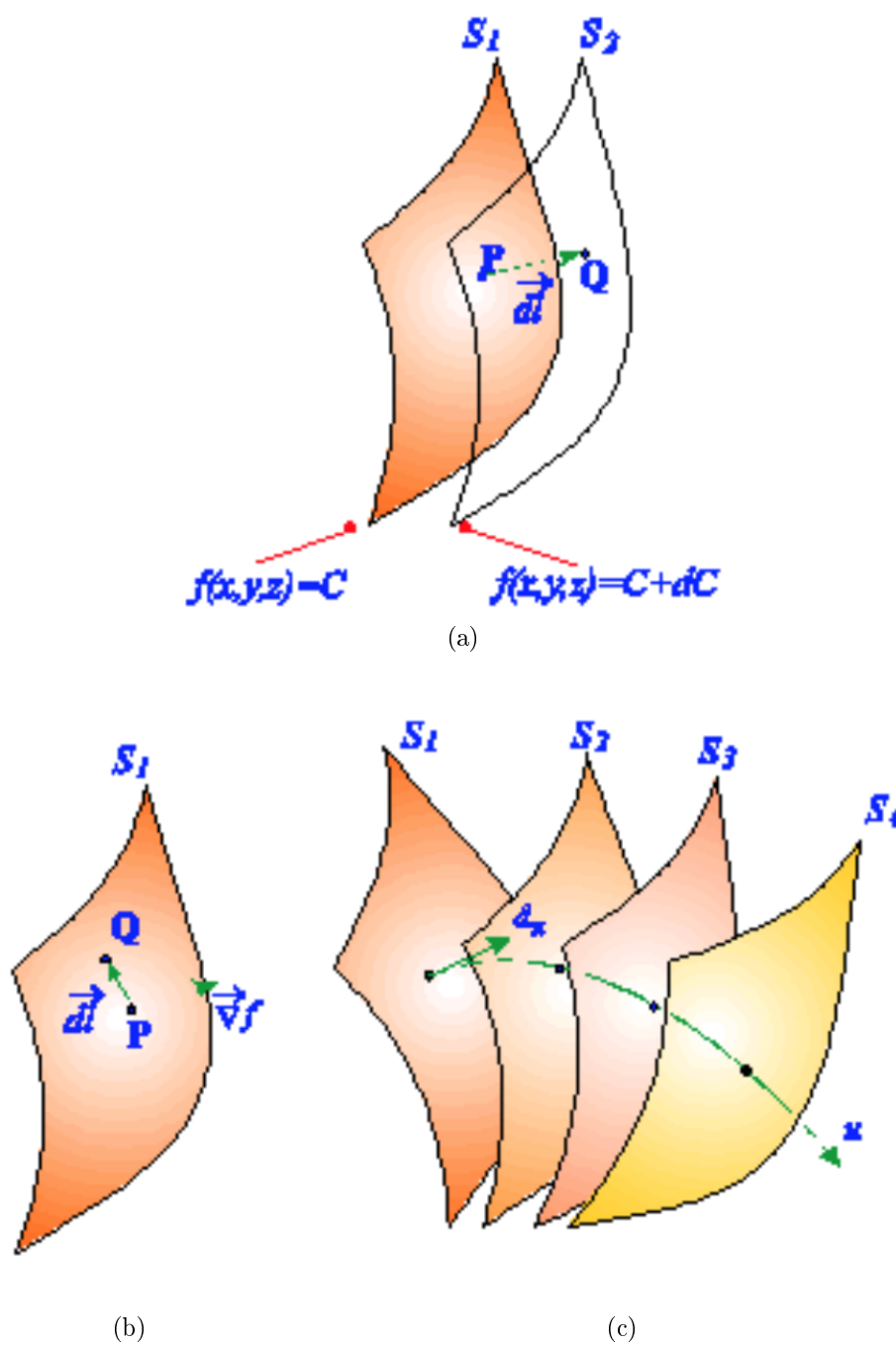


Figura 12: Geometria das superfícies e disposição de vetores utilizados na definição do gradiente de uma função.

$$df = 0 = \vec{\nabla} f \cdot \vec{dl} \quad (29)$$

o que indica que o vetor  $\vec{\nabla} f$  é perpendicular a superfície  $S_1$  no ponto  $P$ . Orientando-se o vetor  $\vec{dl}$  de forma a torná-lo paralelo e no mesmo sentido do vetor  $\vec{\nabla} f$ , a magnitude de  $\vec{dl}$  assume seu valor mínimo, resultando em:

$$\vec{dl} // \vec{\nabla} f \Rightarrow df = |\vec{\nabla} f| dl_{min} \Rightarrow |\vec{\nabla} f| = \frac{df}{dl_{min}} \quad (30)$$

ou seja, o vetor  $\vec{\nabla} f$  tem como magnitude a máxima taxa de variação da função  $f$  no ponto  $P$  e aponta no sentido dessa máxima variação. Definindo-se um caminho curvilíneo passando perpendicularmente a família de superfícies  $S_i$  descritas por equações do tipo,  $f(x, y, z) = C_i$ , conforme ilustrado na Fig.12c, permite expressar o gradiente na forma simples:

$$\vec{\nabla} f = \hat{a}_u \frac{df}{du} \quad (31)$$

onde  $u$  é a variável que mede comprimento ao longo da direção normal ao conjunto de superfícies e  $\hat{a}_u$  é o vetor unitário, tangente a essa trajetória e orientado no sentido de crescimento de  $u$ .

### 1.6.2 Operador Nabla

O operador  $\vec{\nabla}$  pode atuar sobre escalares ou vetores. Operação sobre uma função escalar resulta no vetor gradiente. A representação do vetor gradiente é feita com os vetores unitários escritos à esquerda dos respectivos operadores diferenciais, como na Eq.(31). Isso porque, em sistemas de coordenadas curvilíneas, vetores de base em geral dependem dessas coordenadas, e portanto essa notação evita que os operadores diferenciais atuem sobre os vetores de base. Da Eq.(31), o operador  $\vec{\nabla}$ , quando decomposto em uma base de vetores unitários, terá como componentes as derivadas com respeito aos comprimentos diferenciais medidos ao longo dos respectivos eixos coordenados, assumindo a forma geral,

$$\vec{\nabla} = \hat{a}_1 \frac{\partial}{\partial l_1} + \hat{a}_2 \frac{\partial}{\partial l_2} + \hat{a}_3 \frac{\partial}{\partial l_3} \quad (32)$$

onde  $dl_i$  é o comprimento diferencial ao longo do eixo  $i$ . De acordo com essa expressão, as seguintes representações são obtidas nos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas:

- Cilíndricas:

$$\vec{\nabla} = \hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (33)$$

- Esféricas:

$$\vec{\nabla} = \hat{a}_R \frac{\partial}{\partial R} + \hat{a}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{a}_\phi \frac{1}{R \cdot \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (34)$$

### 1.6.3 Divergente

O divergente é uma função escalar resultante de uma operação diferencial sobre um vetor. Considere-se um sistema ortogonal de coordenadas generalizadas, representadas pelas variáveis  $u, v$  e  $w$ . Os elementos diferenciais de comprimento associados a essas variáveis são definidos por:

$$dl_1 = h_1 du, \quad dl_2 = h_2 dv, \quad dl_3 = h_3 dw$$

Os parâmetros  $h$ , são fatores de escala, funções das coordenadas, que multiplicados pelos respectivos elementos diferenciais  $du$ ,  $dv$  e  $dw$ , produzem os comprimentos diferenciais correspondentes. Na Tabela 1, estão tabulados os parâmetros  $h$  correspondentes aos três sistemas de coordenadas mais utilizados.

Sistemas	$u$	$v$	$w$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
Cartesianas	$x$	$y$	$z$	1	1	1
Cilíndricas	$r$	$\phi$	$z$	1	$r$	1
Esféricas	$R$	$\theta$	$\phi$	1	$R$	$R.\text{sen}\theta$

Tabela 1: Parâmetros  $h$  e variáveis correspondentes em três sistemas de coordenadas.

Seja o cubo curvilíneo de volume  $\Delta V = h_1 h_2 h_3 du dv dw$ , ilustrado na Fig.1.12, com centro no ponto  $P(u_0, v_0, w_0)$ , e um campo vetorial

$$\vec{F}(u, v, w) = \hat{a}_u F_u(u, v, w) + \hat{a}_v F_v(u, v, w) + \hat{a}_w F_w(u, v, w)$$

Define-se o divergente de  $\vec{F}$  no ponto  $P$  pela relação,

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (35)$$

que mede a densidade volumétrica de fluxo líquido do vetor  $\vec{F}$  para fora de um volume diferencial com centro no ponto  $P$ . Com base na geometria ilustrada nas Figs.1.12 a e b, é possível determinar-se formalmente uma expressão para o divergente em termos das componentes de  $\vec{F}$  e das coordenadas  $u$ ,  $v$  e  $w$ . Para isso basta computar-se o fluxo do vetor para fora do volume diferencial, através das seis superfícies do cubo curvilíneo. Na Fig.1.12b, estão indicadas as superfícies  $S_1$  e  $S_2$ , e a superfície intermediária  $S_0$ . Sendo  $\hat{a}_u$  o vetor normal a superfície intermediária, obtém-se para o fluxo através dessa superfície

#### 1.6.4 Rotacional

### 1.7 Identidades vetoriais

## 1.8 Alguns teoremas da análise vetorial

#### 1.8.1 Teorema de Gauss

#### 1.8.2 Teorema de Stokes

#### 1.8.3 Identidades de Green

#### 1.8.4 Teorema de Helmholtz